Littelwoodの定理の初等的検証と
双子素数定理・素数定理への適用［補正版］

宇都宮 潔

2025年1月21日

本稿は[MW]に従い,Littelwoodの定理を検証することを主なテーマとし,１月９日発表の補足を行いながら,HLの双子素数係数命題を定理化し,Pintzの証明による素数定理と併せて, ２つの定理を実際に適用評価することを目的とします.

§1. Marek Wolfの数値実験は何故可能なのか.

定理1（Littlewood,1914,1918）

(1.1)

（ｉ）$\pi(x)-\mathrm{li}(x)=\Omega_{\pm}\left(\sqrt{x}\dfrac{\log\log\log x}{\log x}\right)$

（ⅱ）$\pi(x)-\mathrm{li}(x)$は符号を無限回変える.［WN2],[WKL]

(1.1)の(ⅱ)について初等的な観点から考えたい.Marek Wolfの検証実験ではHLの双子素数係数命題

(1.2) $$\pi_2(x) \sim 2C_2\int_2^x\frac{du}{(\log u)^2},\ C_2=\prod_{p\geqq 3}\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}=0.66016\cdots(\text{HL定数}).$$

[HW]に依拠している.しかし, これは間違いで, 正しくは,(1.3)である.

【双子素数係数定理】x以下の双子素数の個数$\pi_2(x)$は(1.3)で与えられる.

(1.3) $$\pi_2(x) \sim 2C_2\int_2^x\frac{du}{\log u\ \log(u+2)},\ C_2=\prod_{p\geqq 3}\frac{p(p-2)}{(p-1)^2}.$$

[(1.3)の証明] 双子素数の組(p,p+2)の確率関数は弟が1/log x, 兄が1/log(x+2)であり, 互いに独立な事象として生起するが, 双子ペアの生起する事象は, 弟事象をA, 兄事象をBとすれば, 積事象A∩Bであり, 乗法定理

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

に従う. 即ち, 兄弟独自の事象に対する確率関数の2乗ではないと分かる.よって, (1.3)の被積分関数が得られるが, これは発散し積分不能. だが...,

$$\frac{d}{dx}\frac{x}{\ln x}=\left(x(\ln x)^{-1}\right)'=1\cdot(\ln x)^{-1}-x\cdot(\ln x)^{-2}\cdot(1/x)=\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{(\ln x)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{(\ln x)^2} = \frac{1}{\ln x} - \frac{d}{dx}\frac{x}{\ln x} \Rightarrow (*) \int \frac{dx}{(\ln x)^2} = \int \frac{dx}{\ln x} - \frac{x}{\ln x}.$$

$\mathrm{Li}(x) := \int_2^x \frac{du}{\ln u}$ に対し, $\mathrm{Li}_2(x) := \int_2^x \frac{dx}{(\ln x)^2}$, $\mathrm{Li}_2(x) = \mathrm{Li}(x) - \frac{x}{\ln x}$ を導入[MW].

$u>0,\ u+2>0$ より, 相加相乗平均の関係から,

$$\frac{1}{2}\{\ln u + \ln(u+2)\} \geqq \sqrt{\ln u \ln(u+2)}.$$

$$左辺 = \frac{1}{2}\ln u(u+2) = \frac{1}{2}\ln\left\{(u+1)^2-1\right\} < \frac{1}{2}\ln(u+1)^2 = \ln(u+1).$$

$$\therefore \quad \ln(u+1) > \sqrt{\ln u \ln(u+2)} \Rightarrow \{\ln(u+1)\}^2 > \ln u \ln(u+2)$$

$\ln(u+2) > \ln u$ であるから, $\{\ln(u+1)\}^2 > \ln u \ln(u+2) > (\ln u)^2$.

したがって,(1.3) の積分に関して, 次式が得られる.

$$\int_2^x \frac{du}{(\log u)^2} > \int_2^x \frac{du}{\log u \log(u+2)} > \int_2^x \frac{du}{(\log (u+1))^2}$$

最右辺の式は, $u+1=t$ の置換により, $\int_3^{x+1} \frac{du}{\log u^2}$ と書けるから,

(1.4) $$\mathrm{Li}_2(x) - \mathrm{Li}_2(2) > I = \int_2^x \frac{du}{\log u \log(u+2)} > \mathrm{Li}_2(x+1) - \mathrm{Li}_2(3).$$

双子素数ペアの差$=|(p+2)-p|=2$であるが, 両端の値では,

上端の差$=|(x+1)-x|=1$, 下端の差$=|3-2|=1$ と半分になるから, 積分I

は平均式(1.5)を採用すれば計算できる, と言える.

(1.5) $$\int_2^x \frac{du}{\log u \log(u+2)} = \frac{1}{2}\{\mathrm{Li}_2(x) + \mathrm{Li}_2(x+1)\} - \frac{1}{2}\{\mathrm{Li}_2(2) + \mathrm{Li}_2(3)\}.$$

何故なら, 弟と兄の位置(2,x)と(3.x+1)が決まってはじめて(1.4)が意味を持つからである. 登山中, 落下事故を防ぐにはザイルでしっかりと固定しなければならない. この場合には, しかも2点の固定が必要なのである.

上記以外の証明は[HW]のⅡを参考に. これで同命題は定理となった□

[MW]の数表を検証するために, 次のように式を立てた.

双子素数の弟の番号－(1.4)式の両端の平均値 を計算.

$F(N,x) = \gamma + \ln(\ln(x)) + \sum_{n=1}^{N} \frac{(\ln(x))^n}{n \cdot n!}$ に対し, (1.4)の弟・兄の積分値を夫々

$$\mathrm{Li2a}(x) = F(100,x) - \frac{x}{\ln(x)} - \left(F(100,2) - \frac{2}{\ln(2)}\right) + 10^{-14}$$ と,

$$\mathrm{Li2b}(x) = F(100,x) - \frac{x}{\ln(x)} - \left(F(100,3) - \frac{3}{\ln(3)}\right) - 10^{-14}$$ で定めた.

[MW]の最初の符号変化が検出できた①では，具体的な式と値は次式. 他の28個も基本的に同じで検出結果はExcel表で提示済み.

①[注]
21484−2*C2*(Li2a(1369337)+Li2b(1369338))= −0.585648880218462
21486−2*C2*(Li2a(1369391)+Li2b(1369392))= 0.700136724995808

[注]上式は,本来は，$\pi_2(x)-2C_2\int_2^x \frac{du}{\ln u \ln(u+2)}$に従って，21484/2 −C2*・・・とすべきだが，2倍して計算している.

上のF(N,x)は次式(1.6)に従っている. γはEuler定数0.5772156649…,
対数積分li(x)の上端をli(μ)=$\int_0^{\mu}\frac{du}{\ln(u)}$=0 となるように定める.

μ=1.45136923488338105028 は便利なSoldner定数.

(1.6) $$\mathrm{li}(x)=\int_{\mu}^{x}\frac{du}{\ln(u)}=\gamma+\ln(\ln(x))+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln(x))^n}{n\cdot n!}\quad \text{for } x>1$$

μを使った定義式(1.6)ではLi(x)の計算は次式で与えられるので，これにしたがって，Li2a(x), Li2b(x)を定めた.

$$\mathrm{Li}(x)=\int_2^x\frac{du}{\ln u}=\int_{\mu}^{x}\frac{du}{\ln u}-\int_{\mu}^{2}\frac{du}{\ln u}.$$

(参考事項) 対数積分Li(x)の導出には2通りの方法があるが，説明上よく使われる部分積分による(1.7)は，大きいx, nには誤差大で不適.

(1.7) $$\int_2^x\frac{du}{\ln u}=\frac{x}{\ln x}-\frac{2}{\ln 2}+\sum_{n=1}^{\infty}n!\left\{\frac{x}{(\ln x)^n}-\frac{2}{(\ln 2)^n}\right\}$$

他方，(1.6)の元になった(1.8)は，精度が高く大きいx,nに対しても有効.

(1.8) $$\mathrm{Li}(x):=\int_2^x\frac{dt}{\ln t}=\ln(\ln x)-\ln(\ln 2)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln x)^n-(\ln 2)^n}{n\cdot n!}$$

(1.6),(1.8)でLi(x)の値を与える主要項は，無限和$\sum_{n=1}^{\infty}(\log x)^n/n\cdot n!$である.

これは，e^Xを$-\infty<X<\infty$で，テイラー展開した次式を不定積分して，容易に導かれる：

$$\frac{e^X}{X}=\frac{1}{X}+1+\frac{X}{2!}+\frac{X^2}{3!}+\cdots \Rightarrow \int\frac{e^X}{X}dX=\ln X+X+\frac{X^2}{2\cdot 2!}+\frac{X^3}{3\cdot 3!}+\cdots,$$

$$\int_{\ln 2}^{\ln x}\frac{e^X}{X}dX=\left[\ln X+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X^n}{n\cdot n!}\right]_{\ln 2}^{\ln x}=\ln(\ln x)-\ln(\ln 2)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln x)^n-(\ln 2)^n}{n\cdot n!}.$$

双子素数の番号付けは，Wolfram Alphaに従った. 即ち,3,5,7,11,13,…に対して，1,2,3,4,5,…である.単的に言えば，5は一度しか数えず2番で，弟はどれも偶数番号，兄は奇数番号である.

双子素数ペアは，通常(3,5),(5,7),(11,13),…とされ，5が2回数えられてしまう．Brunは，定理提示の最初，いわゆるBrun定数B_2の定義を(3,5)を除いて

$B_2=\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{19}\right)+\cdots$ とし，単に5以上のすべての6k±1型の素数から単純に定めた．(1/3+1/5)を含めると混乱を招きやすい．3は奇素数だが6k±1型ではない．

§2．素数定理ではどの式を適用するのか．

次の問題点はLittelwoodの定理1で，素数定理$\pi(x)$を$x/\log x$で近似してはならない，ということだ．その理由は，$x/\log x$を採用すると精度が落ちるのに加えて，(1.1)(ⅱ)で言うような符号変化は決して起きず，$li(x)>\pi(x)$ であり，したがって，Schmitの背理法による証明(1903)からRiemann予想が成り立つことが直ちに導かれる，となってしまうのである．

さて，$\pi(x)$の値を与える素数定理として，(2.1)式を使う.(証明は後回し)．

(2.1)
$$\pi(x)\sim\frac{1}{\log x-1}$$

(2.1)の使用により，xの値を1個決めれば，$li(x)-\pi(x)$の符号変化が必ず1回だけ起きる，ことを次に初等的方法で示そう．

$Y<1$ならば，明らかに次式が成り立つ．

$$\frac{x}{Y-1}=\frac{x}{Y\left(1-\frac{1}{Y}\right)}=\frac{x}{Y}\left(1+\frac{1}{Y}+\frac{1}{Y^2}+\cdots\right)=\frac{x}{Y}+\frac{x}{Y^2}+\frac{x}{Y^3}+\cdots=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{Y^n}$$

xを3以上の奇素数とすれば，$x>e$であるから，Yに $\ln x$を代入して，

$$\therefore\quad \pi(x)\sim\frac{x}{\ln x-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln x)^n}\ .$$

(2.2)
$$\pi(x)\sim x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln x)^n}.$$

したがって，上の目標のために，定理1の$li(x)$と$Li(x)$の差異を無視して議論する．理由:$Li(x)=li(x)-1.04\cdots$だが，$li(x)-\pi(x)$の符号が無限回変わるので，誤差のために脱落するものが起きるが，細部にこだわるのを避けるためである．

さて, Marek Wolfが導入した関数

$\mathrm{Li}_2(x):=\mathrm{Li}(x)-\dfrac{x}{\ln x}$ と $\mathrm{Li}(x)-\pi(x)$ の差異は $x\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln x)^n}$ である.

ただし, $\mathrm{Li}(x):=\int_{\mu}^{x}\dfrac{dt}{\ln t}$ ($\mu=1.45136\cdots$), $\mathrm{li}(\mu)=$主値$\int_0^{\mu}\dfrac{dt}{\ln t}=0$ とし,

$$\mathrm{Li}(x):=\int_{\mu}^{x}\frac{dt}{\ln t}=\gamma+\log(\log x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\log x)^n}{n\cdot n!} \tag{2.3}$$

を用いる. (2.3)は(1.6)と同じ.

(2.3)－(2.2)から,

$$\mathrm{Li}(x)-\pi(x)\sim\ \gamma+\log(\log x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\log x)^n}{n\cdot n!}-x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln x)^n}$$

$$=\ \gamma+\log(\log x)+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(\log x)^n}{n\cdot n!}-\frac{x}{(\log x)^n}\right\}$$

$$F(x,n)=\ \gamma+\ln(\ln x)+\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{(\ln x)^k}{k\cdot k!}-\frac{x}{(\ln x)^k}\right\}\qquad \gamma=0.5772156649$$

$x=e^t$, $\ln x=t$と置換した次式から, $F(e^e,n)$などをnを変えて数値計算すると,

$F(t,n)=\ \gamma+\ln t+\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{t^k}{k\cdot k!}-\dfrac{e^t}{t^k}\right)$ に対し, $F(t,n)$の符号変化が分かる.

$-\infty<t<\infty$に対して, e^tをテイラー展開すれば, 固定したkの値に対して,

$$\frac{t^k}{k\cdot k!}-\frac{e^t}{t^k}=\frac{t^k}{k\cdot k!}-\frac{1}{t^k}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$$

O(1)以下

$$=\frac{t^k}{k\cdot k!}-\frac{1}{t^k}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^k}{k!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}+\cdots\right)$$

$$=\frac{t^k}{k\cdot k!}-\left(\boxed{\frac{1}{t^k}+\frac{1}{1!t^{k-1}}+\frac{1}{2!t^{k-2}}+\cdots+\frac{1}{k!}}+\frac{t}{(k+1)!}\cdots+\frac{t^k}{(2k)!}+\cdots+\frac{t^{n-k}}{n!}+\cdots\right)$$

$$=\frac{t^k}{k\cdot k!}+O(1)-\frac{t}{(k+1)!}-\frac{t^2}{(k+2)!}-\cdots-\frac{t^k}{(2k)!}-\frac{t^{k+1}}{(2k+1)!}-\cdots-\frac{t^{n-k}}{n!}+\cdots$$

となり, tのある次数の項以降において, 符号が正から負に変わる点があるのに気づく.

増減を調べるためにtで微分してみても,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t^k}{k\cdot k!}-\frac{e^t}{t^k}\right)=\frac{t^{k-1}}{k!}+O(1)-\frac{2t}{(k+2)!}-\cdots-\frac{kt^{k-1}}{(2k)!}\cdots-\frac{(n-k)t^{n-k-1}}{n!}-\cdots$$

$\dfrac{d}{dt}F(t,n)=\dfrac{1}{t}+\dfrac{t^{k-1}}{k!}+O(1)-\sum_{n=k+2}^{\infty}\dfrac{(n-k)t^{n-k-1}}{n!}$ であるから,

十分大きいt,nに対して, 増加から減少に変わる.

まず，tの指数比較から，$k-1<n-k-1 \Leftrightarrow 2k<n$

n=2k に対応する項は，$\dfrac{t^{k-1}}{k!}-\dfrac{kt^{k-1}}{(2k)!}=\dfrac{(2k)!-k\cdot k!}{k!(2k)!}t^{k-1}>0.$

n>2kの各項の和は，$-\sum_{m=1}^{\infty}\dfrac{k+m}{(2k+m)!}t^{k+m-1}<0.$

$$G(x)=\frac{x}{\ln x}-\frac{x}{\ln x-1}$$

を利用し，素数定理の2つの近似評価式を比較してみた．$2^{21}\fallingdotseq e^{14.556}$

級数展開での計算値

$$①\ \frac{x}{\ln x-1}\ :\ \frac{e^{14.556}}{14.556}\left(\sum_{n=0}^{20}\frac{1}{14.556^{n}}\right)=154688.81709388$$

代入での計算値

$$①\ \frac{e^{14.556}}{\ln e^{14.556}-1}=154688.81709388$$

両者が完全に一致．

$$②\ \frac{x}{\ln x}\ :\ \frac{e^{14.556}}{14.556}=144061.665603506$$

$$\frac{①}{②}\ :\ \frac{154688.81709388}{144061.665603506}*100=107.376807317793$$

7．38%の誤差

下表はWikipedia素数定理の数表を加工作成した．赤字が①の x/(ln x −1)，

黒字が②の x/ln x である．日英両国版とも①形式の項目は未だにない．

x	π(x)	π(x)/(x/log(x))	π(x)/(x/(log x −1))	x/(log(x)−1)
1.E+01	4	0.92103	0.52103	7.677
1.E+02	25	1.15129	0.90129	27.738
1.E+03	168	1.16050	0.99250	169
1.E+04	1,229	1.13195	1.00905	1218
1.E+05	9,592	1.10432	1.00840	9512
1.E+06	78,498	1.08449	1.00599	78030
1.E+07	664,579	1.07117	1.00472	661459
1.E+08	5,761,455	1.06130	1.00368	5740304
1.E+09	50,847,534	1.05373	1.00288	50701542
1.E+10	455,052,511	1.04780	1.00229	454011971
1.E+11	4,118,054,813	1.04304	1.00186	4110416301
1.E+12	37,607,912,018	1.03915	1.00154	37550193650
1.E+13	346,065,536,839	1.03590	1.00129	345618860221
1.E+14	3,204,941,750,802	1.03315	1.00110	3201414635781
1.E+15	29,844,570,422,669	1.03079	1.00095	29816233849001
1.E+16	279,238,341,033,925	1.02875	1.00083	279007258230820
1.E+17	2,623,557,157,654,233	1.02696	1.00073	2621647966812030
1.E+18	24,739,954,287,740,860	1.02539	1.00065	2.47239987859200E+16
1.E+19	234,057,667,276,344,607	1.02398	1.00058	2.33922961602470E+17
1.E+20	2,220,819,602,560,918,840	1.02273	1.00052	2.21967197401373E+18
1.E+21	21,127,269,486,018,731,928	1.02159	1.00047	2.11174122629100E+19
1.E+22	201,467,286,689,315,906,290	1.02057	1.00042	2.01381995844660E+20
1.E+23	1,925,320,391,606,803,968,923	1.01964	1.00039	1.92457745916681E+21
1.E+24	18,435,599,767,349,200,867,866	1.01879	1.00035	1.84290888965639E+22
1.E+25	176,846,309,399,143,769,411,680	1.01801	1.00032	1.76788931049964E+23
1.E+26	1,699,246,750,872,437,141,327,603	1.01729	1.00030	1.69873849792972E+24
1.E+27	16,352,460,426,841,680,446,427,399	1.01663	1.00028	1.63479370652290E+25
1.E+28	157,589,269,275,973,410,412,739,598	1.01602	1.00026	1.57548836041269E+26

li(x)	li(x)/π(x)	li(x)/(x/(log(x)-1))	π(x)/(x/(log(x)-1))	x
6.166	1.54150000000000	0.8031740	0.5210340	10
30.126	1.20504000000000	1.0860936	0.9012925	10^2
178	1.05952380952381	1.0515804	0.9925029	10^3
1,246	1.01383238405207	1.0230084	1.0090508	10^4
9,630	1.00396163469558	1.0123947	1.0083998	10^5
78,628	1.00165609314887	1.0076580	1.0059919	10^6
664,918	1.00051009736991	1.0052294	1.0047169	10^7
5,762,209	1.00013086971954	1.0038160	1.0036847	10^8
50,849,235	1.00003345294975	1.0029130	1.0028794	10^9
455,055,615	1.00000682119080	1.0022987	1.0022919	10^10
4,118,066,401	1.00000281394992	1.0018611	1.0018583	10^11
37,607,950,281	1.00000101741889	1.0015381	1.0015371	10^12
346,065,645,810	1.00000031488544	1.0012927	1.0012924	10^13
3,204,942,065,692	1.00000009825140	1.0011018	1.0011017	10^14
29,844,571,475,288	1.00000003527003	1.0009504	1.0009504	10^15
279,238,344,248,557	1.00000001151214	1.0008282	1.0008282	10^16
2,623,557,165,610,822	1.00000000303275	1.0007282	1.0007282	10^17
24,739,954,309,690,415	1.00000000088721	1.0006453	1.0006453	10^18
234,057,667,376,222,382	1.00000000042672	1.0005759	1.0005759	10^19
2,220,819,602,783,663,484	1.00000000010030	1.0005170	1.0005170	10^20
21,127,269,486,616,126,182	1.00000000002828	1.0004668	1.0004668	10^21
201,467,286,691,248,261,498	1.00000000000959	1.0004235	1.0004235	10^22
1,925,320,391,614,054,155,139	1.00000000000377	1.0003860	1.0003860	10^23
18,435,599,767,366,347,775,144	1.00000000000093	1.0003533	1.0003533	10^24
176,846,309,399,198,930,392,619	1.00000000000031	1.0003246	1.0003246	10^25
1,699,246,750,872,593,033,005,724	1.00000000000009	1.0002992	1.0002992	10^26
16,352,460,426,842,189,113,085,405	1.00000000000003	1.0002767	1.0002767	10^27
157,589,269,275,974,838,158,399,972	1.00000000000001	1.0002566	1.0002566	10^28

§3. 素数定理漸近式の証明

GaussやLegendreの研究によって，素数の個数を数える関数をπ(x)とすれば，

(3.1) $$\pi(x)=\frac{Bx}{\log x-A+o(1)}$$

と予想されてきた．チェビシェフは次の不等式を証明(1852)し，さらに，

$$c_1\frac{x}{\log x}<\pi(x)<c_2\frac{x}{\log x},\quad c_1=0.92129,c_2=1.20555$$

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{\pi(x)\log x}{x}$ が存在するならば，1でなければならない，ことを示したとされる．

(3.2) $$\pi(x)=\frac{x}{\log x-1}$$

また,Pintzがこの簡明な方法を発見(1980)したが，これは[HW]の『数論入門Ⅱ』定理424，425とその証明を援用すれば見つかる．これについては後で試みる．

まず，(3.1)の両辺にlog xを乗じて得た次式で，x→∞とすれば，

$$\pi(x)\log x=\frac{Bx\log x}{\log x-A+o(1)}=\frac{Bx}{1-\dfrac{A+o(1)}{\log x}}\to Bx\ (x\to\infty)$$

$$\boxed{2式\ \phi(x)\sim x\ と\ \pi(x)\sim\frac{\phi(x)}{\log x}\Rightarrow\phi(x)\sim\pi(x)\log x\sim x}$$

が結論されることを念頭におけば，明らかに，B=1が従う.

いま，$\dfrac{1}{1-X}=1+X+X^2+\cdots= 1+X+o(X),\ X\to 0$であり，この等式の両辺にBxを乗じれば(3.1)を得るから，Xに$\dfrac{A+o(1)}{\log x}$を代入すると，

(3.3) $$\pi(x)\log x=\frac{Bx}{1-\dfrac{A+o(1)}{\log x}}=Bx+\frac{B(A+o(1))x}{\log x}+o\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

したがって，次の Pintzの定理を認めれば，B=1に加えてA=0 なので，

$\pi(x)\log x\to x\ (x\to\infty)$ が導かれる.

【定理2】(Pintz)　$\phi(x)$が

(3.4) $$\phi(x)=Bx+\frac{(C+o(1))x}{\log x}$$

を満たすのであれば，B=1，かつ C=0でなければならない.

Abel総和公式(4.2)において，$c_n=\Lambda(n)$[補遺]，$f(t)=1/t$とおけば，

$C(x)=\sum_{n\leqq x}c_n=\sum_{n\leqq x}\Lambda(n)=\sum_{p^m\leqq x}\log p=\phi(x)$であるから，

(3.5) $$\sum_{n\leqq x}\frac{\Lambda(n)}{t}=\frac{\phi(x)}{x}+\int_2^x\frac{\phi(t)}{t^2}dt.$$

他方,[HW]の定理424[補遺]から，(3.6)も成り立つ.

(3.6) $$\sum_{n\leqq x}\frac{\Lambda(n)}{t}=\log x+O(1).$$

このとき，仮定(3.4)から，(3.5)の右辺は

$$O(1)+\int_2^x\frac{1}{t^2}\left(Bt+\frac{(C+o(1))t}{\log t}\right)dt$$

$$=\int_2^x\left(\frac{B}{t}+\frac{C+o(1)}{t\log t}\right)dt=B\log x+(C+o(1))\log(\log x)$$

$$\overset{\text{定理2}}{=}\log x+\log(\log x)\overset{(3.6)}{=}\log x+O(1).$$

したがって，B=1，C=0 でなければならないことが分かった.　□

Abel総和公式(4.2)で，$c_n = \pi(n)$, $f(t) = \log t$とすれば，

(3.7) $$\phi(x) = \pi(x)\log x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt.$$

$\phi(x) \sim \pi(x)\log x$から，$\pi(x)$の誤差は1未満であることと，$\pi(x) \sim \dfrac{x}{\log x}$を

勘案すれば，$\phi(x) - \left(\pi(x)\log x - \displaystyle\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt\right) = o\left(\dfrac{x}{\log x}\right) + o\left(\displaystyle\int_2^x \frac{dt}{\log^2 t}\right)$

と考えられるが, (4.2)を直接適用すれば, より簡明に(3.7)のように書ける.

ここで, 関係式

$$\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt \sim \int_2^x \frac{1}{\log t}dt = \frac{x}{\log x} + \int_2^x \frac{dt}{\log^2 t}$$

を使った(右辺の式は部分積分による). すると, 結局,

(3.8) $$\phi(x) \sim \pi(x)\log x - \frac{x}{\log x}$$

となるので, この右辺は(3.3) − x/log x から,

$$\phi(x) \sim Bx + \frac{(B(A-1) + o(1))x}{\log x} \sim x \ (x \to \infty) \ \Rightarrow A = B = 1. \qquad \square$$

§4. Abel総和公式の証明

以下では,部分積分法に酷似する, Abel総和公式の証明[HW]を解説する.

【Abel総和公式】 数列$\{c_n\}$に対し，$C(t) := \sum_{n \leqq t} c_n$を定め，$f(t)$もともにtの関数とする.

このとき，有限級数和$\sum_{n \leqq x} c_n f(n)$で，和の取り方を変更すれば，

(4.1) $$\sum_{n \leqq x} c_n f(n) = \sum_{n \leqq x-1} C(n)\{f(n) - f(n+1)\} + C(x)f([x]).$$

さらに，$j < n_1$に対して，$c_j = 0$であって，$f(t)$が$t > n_1$に対して連続な導関数をもつならば，

(4.2) $$\sum_{n \leqq x} c_n f(n) = C(x)f(x) - \int_{n_1}^x C(t)f'(t)dt$$

である.

［証明］ N=[x]と書くと，c_j=C(j)−C(j−1) (2≦j≦N)であるから，

$$\sum_{n\leqq x} c_n f(n) = \sum_{j\leqq N} \{ C(j)-C(j-1)\} f(j)$$
$$= C(1)f(1)+\{ C(2)-C(1)\} f(2)+\{ C(3)-C(2)\} f(3)+\cdots+\{ C(N)-C(N-1)\} f(N)$$
$$= C(1)\{f(1)-f(2)\} + C(2)\{f(2)-f(3)\}+\cdots+C(N-1)\{f(N-1)-f(N)\}+C(N)f(N)$$

C(N)=C(x)より，(4.1)が導かれる.

次に，(4.2)を示すには,n≦t<n+1のとき，C(t)=C(n)であるから，

$$C(n)\{f(n-1)-f(n)\}=-\int_n^{n+1} C(t)f'(t)dt$$

に注意すれば，n_1≦j≦[x]−1として，

$$\sum_{n_1\leqq j<x} C(j)\{f(j-1)-f(j)\} = -\sum_{n_1\leqq j<x}\int_j^{j+1} C(t)f'(t)dt =-\int_{n_1}^{x} C(t)f'(t)dt$$

であり，t<n_1 のときは，$C(t)=\sum_j c_j = 0$であるから,(4.2)が従う. □

［補遺］

[HW]の定理424を示すために，次の補題1を示す.

補題1 $\int_{n-1}^{n} \log x dx < \log n$

これが言えれば，$\sum_{n\leqq x} \log n = x\log x+ O(x)$ が導かれ，定理424が示せる.

[HW]は補題1を自明として，証明していない. 代わりに

定理423 $\sum_{n\leqq x} \log^h\left(\frac{x}{n}\right)= O(x)$ (h>0)

を示すのに，n≧2のとき，$\log^h\left(\frac{x}{n}\right)< \int_{n-1}^{n} \log^h\left(\frac{x}{t}\right)dt$ を論じている.

あとで，h=1とおくだけで補題1となるが，ページ数制限のためだろうか？

［補題1の証明］部分積分により，

$$\text{左辺}= [x\log x- x]_{n-1}^{n}=n\log n-(n-1)\log(n-1)-1$$
$$=-1+\log n+(n-1)\log n-(n-1)\log(n-1)$$
$$=-1+\log n+(n-1)\log\frac{n}{n-1}$$
$$= -1+\log n+\log\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \to -1+\log n+\log \boldsymbol{e}=\log n \ (n\to\infty)$$

$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}< \boldsymbol{e}$ は必ずしも自明ではない.ただし，$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \boldsymbol{e}$.

よって，$\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ (n≧2) … ①を示す.

［証明1］ ①⇔ $x \geqq 2$のとき, $f(x) = x\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right) - (x-1)\log\left(1+\dfrac{1}{x-1}\right) > 0$ を示す.

$$f(x) = x\log\frac{x+1}{x} - (x-1)\log\frac{x}{x-1} = x\log(x+1) - (2x-1)\log x + (x-1)\log(x-1) \quad \cdots \text{(a)}$$

$g(t) = \log(t+1) - \log t \quad (x-1 \leqq t \leqq x)$は, $g'(t) = \dfrac{1}{t+1} - \dfrac{1}{t} = -\dfrac{1}{t(t+1)} < 0$ より,

単調減少であるから, $g(x-1) > g(x)$.

$$g(x-1) - g(x) = \{\log x - \log(x-1)\} - \{\log(x+1) - \log x\}$$

$$= 2\log x - \log(x-1) - \log(x+1) > 0$$

全体に, $-(x-1/2)$を掛け, 次式(b)を得る.

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\log(x+1) - (2x-1)\log x + \left(x-\frac{1}{2}\right)\log(x-1) < 0 \quad \cdots \text{(b)}$$

2式(a)と(b)を比べて, $x > x-1/2 > x-1$であることから, (a)−(b)を計算すると,

$$\text{(a)}-\text{(b)} = \frac{1}{2}\log(x+1) - \frac{1}{2}\log(x-1) = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1} \geqq \frac{1}{2}\log 3 > 0 \ (x \geqq 2).$$

したがって, (a)−(b)> 0>(b) から,(a)>0>2(b). すなわち, $f(x) > 0$. □

［証明2］ $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ と定めると, ① ⇔ $1 > \dfrac{a_{n-1}}{a_n}$ $(n \geqq 2)$と書ける.

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n-1}\frac{n}{n+1}$$

$$= \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n \frac{n}{n+1}\frac{n^2-1}{n^2} = \frac{\frac{n^2-1}{n^2}}{\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \frac{n+1}{n}} \quad \cdots \text{②}$$

n個の相加相乗平均 $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \geqq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}$ (等号は,全a_iが等しいとき) から,

(n+1)の相加相乗平均より,

$$\sqrt[n+1]{\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \frac{n+1}{n}} < \frac{n\cdot\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) + \frac{n+1}{n}}{n+1} = \frac{n^2-1+n+1}{n(n+1)} = 1$$

であるから, 0<②の分母<1. また, $\dfrac{3}{4} \leqq$ ②の分子<1.

しかも, 十分大きいnに対して, ②の分母>②の分子で,

$n \to \infty$のとき, $\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right)^n \dfrac{n+1}{n} \to 1$, $\dfrac{n^2-1}{n^2} \to 1$ で,

$$\text{①} = \frac{\frac{n}{n+1}}{\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n-1}} \geqq \frac{2/3}{\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{n-1}} > 0 \text{ から, } 0 < \frac{a_{n-1}}{a_n} < 1. \quad \therefore \ a_{n-1} < a_n. \quad \square$$

【Λ(n)の定義】関数Λ(n)は

$$\Lambda(n) = \log p \quad (n=p^m),$$

$$\Lambda(n) = 0 \qquad (n \neq p^m)$$

のように定義される. すなわち, nが素数pまたはそのべき乗のときlog pで, それ以外のときは0とする. 例: $\Lambda(10) = 3\log 2 + 2\log 3 + \log 5 + \log 7$.

log2はn=2,4,8に対応し, log3はn=3,9に対応する.

【定理424】 $\displaystyle\sum_{n \leqq x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \log x + O(1)$

［証明］ 補題1 $\displaystyle\int_{n-1}^{n} \log t\,dt < \log n$ より, $\displaystyle\sum_{n=2}^{[x]} \int_{n-1}^{n} \log t\,dt < \sum_{n=2}^{[x]} \log n$.

左辺$=[t\log t - t]_{t=2}^{t=[x]} = [x]\log [x] + O(x) = x\log x + O(x)$.

右辺は, Legendreの指数べき和公式により,

$$\sum_{n \leqq x} \log n = \sum_{p^m \leqq x} \left[\frac{x}{p^m}\right] \log p = \sum_{n \leqq x} \left[\frac{x}{n}\right] \Lambda(n).$$

ところが, $\displaystyle\sum_{n \leqq x} \Lambda(n) = \Psi(x) = O(x) \cdots \quad (*)$

$$\frac{x}{n} = \left[\frac{x}{n}\right] + \left(\frac{x}{n}\right) > \left[\frac{x}{n}\right], \left(\frac{x}{n}\right)\text{は}\frac{x}{n}\text{の小数部分}$$

であるから, $\left[\frac{x}{n}\right]$のカギ括弧を取り除いた誤差項$\left(\frac{x}{n}\right)$は(*)よりも小さい.

$$\sum_{n \leqq x} \frac{x}{n} \Lambda(n) = \sum_{n \leqq x} \log n + O(x) = x\log x + O(x).$$

したがって, xで割ると,

$$\sum_{n \leqq x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \log x + O(1). \qquad \square$$

【Reference】

[MW]Marek Wolf, The Skewes Number for Twin Primes：Counting Sign Changes of $\pi_2(x) - C_2 Li_2(x)$, 2011.

[HW] ハーディ・ライト,数論入門 I・II ,Springer,2001

[WN2]素数定理の進展・下, W・ナルキエヴィッチ/中嶋眞澄訳, 丸善, 2013

[WKL] ttps://ja.wikipedia.org/wiki/リーマン予想: Littelwoodの定理の項, 真偽の議論の項

[SS] https://integers.hatenablog.com/entry/2019/05/08/052143 Chebyshevによる(素数計数関数についての)Legendre予想の否定的解決について