ピタゴラス数と階差数列

学習院大学理学部数学科 間 慎介

1. 目的

$a^2+c^2=b^2$ を満たす正の整数a,b,cをピタゴラス数と呼ぶ。
a,b,cに共通な因子のないピタゴラス数a,b,c(既約なピタゴラス数)に対して

$$a=m^2-n^2$$

$$b=m^2+n^2$$

$$c=2mn$$

を満たすような互いに素なm,nが存在する。これを用いて既約なピタゴラス数a,b,cを求め、$b-c$の値によって分類した。$a,b,c,b-a$についての規則性を調べる。

2. 結果 1

[a,b,c]	a	b	c
[3, 5, 4]	3	5	4
[15, 17, 8]	15	17	8
[35, 37, 12]	35	37	12
[63, 65, 16]	63	65	16
[99, 101, 20]	99	101	20
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

3. 結果２

$m-n=(2k-1)$より
$b-c=(m-n)^2=(2k-1)^2$と書ける。
そこで$b-c$によって分類する、a,b,cを小さい順に並べたときの
$b-a,a,b,c$ について考える。

$b-c=1$のとき

$[a,b,c]$	a	b	c	$b-a$	$b-c=1$
pyth	*1	*2	*3	$2n^2$	1
[3, 5, 4]	3	5	4	2	1
[5, 13, 12]	5	13	12	8	1
[7, 25, 24]	7	25	24	18	1
[9, 41, 40]	9	41	40	32	1
[11, 61, 60]	11	61	60	50	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

3.0.1. $*$について.

　$b-c=1$のときのaを小さい順に並べて出来た数列を$\{a_n\}$とする。

　同様にb,cを小さい順に並べて出来た数列を$\{b_n\}$, $\{c_n\}$とする。

　$*1$

$a_n = 2n+1$

$*2$

$b_n = 2n^2-2n+1$

$*3$

$c_n = 2n^2-n$

求め方

数列$\{b_n\}$に対してその階差数列を$\{\beta_n\}$とし、さらにその階差数列を考えると4が並ぶ定数数列になる。

$$b_n - b_{n-1} = \beta_n$$

$$\beta_n - \beta_{n-1} = 4$$

$$\beta_1 = 8$$

これを元にしてまず$\{\beta_n\}$を決定し、さらに$\{b_n\}$を求める。

$$\beta_n = \beta_{n-1} + 4$$
$$\beta_{n-1} = \beta_{n-2} + 4$$
$$\beta_{n-2} = \beta_{n-3} + 4$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$\beta_3 = \beta_2 + 4$$

$$\beta_2 = \beta_1 + 4$$

各辺の和を計算する。

$$\beta_n = \beta_1 + 4(n-1)$$

$\beta_1 = 8$ より

$$\beta_n = 4n + 4$$

$$b_n = \sum_{k=1}^{n-1}(4k+4) + b_1$$

$b_1 = 5$ より

$$b_n = \sum_{k=1}^{n-1}(4k+4) + 5$$

$$b_n = 2n^2 + 2n + 1$$

　また、

$$b_n - a_n = d_n$$

とする。

$$\frac{1}{2}d_n = n^2$$

より

$$d_n = 2n^2$$

となる。

$b-c=9$のとき

$[a,b,c]$	a	b	c	$b-a$	$b-c=9$
pyth	**1	**2	**3	$2n^2$	9
[15, 17, 8]	15	17	8	2	9
[21, 29, 20]	21	29	20	8	9
[33, 65, 56]	33	65	56	18	9
[39, 89, 80]	39	89	80	32	9
[51, 149, 140]	51	149	140	50	9
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

3.0.2. ＊＊について.

　$b-c=9$のときのaを小さい順に並べて出来た数列を$\{a_n\}$とする。

　同様にb,cを小さい順に並べて出来た数列を$\{b_n\}$, $\{c_n\}$ とする。各数列の一般項は

　＊＊１

$a_n = 6 + 9n - \frac{3}{2}\{1-(-1)^{(n-1)}\}$

＊＊２

$b_{2n-1} = 18n^2 - 6n + 5$
$b_{2n} = 18n^2 + 6n + 5$

＊＊３

$c_{2n-1} = 18n^2 - 6n - 4$
$c_{2n} = 18n^2 + 6n - 4$

b, cに関しては数列を2つに分け、n番目、$2n-1$番目と分けて考えることで数列を見つけ出すことができた。

さらにaもn番目、$2n-1$番目と分けて考えると

$$a_{2n-1} = 18n - 3 \qquad a_{2n} = 18n + 3$$

$$b_{2n-1} = 18n^2 - 6n + 5 \qquad b_{2n} = 18n^2 + 6n + 5$$

$$c_{2n-1} = 18n^2 - 6n - 4 \qquad c_{2n} = 18n^2 + 6n - 4$$

となり規則性がみられる。

　また、$b - c = 1$のときと同様に

$$b_n - a_n = d_n$$

とする。

$$\frac{1}{2}d_n = n^2$$

より

$$d_n = 2n^2$$

となる。

$b - c = 25$ のとき

$[a, b, c]$	a	b	c	$b - a$	$b - c = 25$
pyth	**1	**2	**3	$2n^2$	25
[35, 37, 12]	35	37	12	2	25
[45, 53, 28]	45	53	28	8	25
[55, 73, 48]	55	73	48	18	25
[65, 97, 72]	65	97	72	32	25
[85, 157, 132]	85	157	132	72	25
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

3.0.3. ＊＊＊について.

$b-c=25$ のときの a を小さい順に並べて出来た数列を $\{a_n\}$ とする。

同様に b,c を小さい順に並べて出来た数列を $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ とする。

a,b,c に関して数列として一般項を見つけることができた。

＊＊＊1

$a_{4n-3}=50n-15$

$a_{4n-2}=50n-5$

$a_{4n-1}=50n+5$

$a_{4n}=50n+15$

＊＊＊2

$b_{4n-3} = 50n^2 - 30n + 17$
$b_{4n-2} = 50n^2 - 10n + 13$
$b_{4n-1} = 50n^2 + 10n + 13$
$b_{4n} = 50n^2 + 30n + 17$

＊＊＊3

$c_{4n-3} = 50n^2 - 30n - 8$
$c_{4n-2} = 50n^2 - 10n - 12$
$c_{4n-1} = 50n^2 + 10n - 12$
$c_{4n} = 50n^2 + 30n - 8$

a, b, cに関しては数列を4つに分け、$4n-3$番目、$4n-2$番目、$4n-1$番目、$4n$番目と分けて考えることで数列を見つけ出すことができた。

また、$b-c=1$のときと同様に

$$b_n - a_n = d_n$$

とする。

$$\frac{1}{2}d_n = n^2$$

より

$$d_n = 2n^2$$

各場合の$\{a_n\}\{b_n\}\{c_n\}\{d_n\}$を考えてきた結果から規則性が見つかりこの先$b-c=49, b-c=81$のときも同様に一般項を求めることができる。

途中でこれは赤とします

これは緑

枠緑 背景は青色

枠赤 背景黄色

字の背景に色をつけましょう

これは黄色

これは赤