3進での循環小数の2分割和の研究

学習院大学理学部数学科

藤原 由樹子

★:. 目的 .:★

はじめに次のような例について考える。

$$\frac{1}{7} = 0.\dot{0}1021\dot{2}_3$$

$\frac{1}{7}$を小数に3進展開し、循環節を半分に分けて足すと

$$010 + 212 = 222$$

となる。

このように、$\frac{1}{p}(p \geq 5,\text{奇素数})$を3進展開したとき

循環節の長さが偶数ならば、それを2分割し
桁上がりも考えて対応する成分を足して出来た数
(これを2分割和という)は2が並ぶことが知られている。

これは$\frac{1}{2p}$についても同様である。

しかし、$\frac{1}{4p}$についてはそうではない。

$4p$の値	3進展開での循環節	2分割和
20	[0, 0, 1, 1]	[1, 1]
28	[0, 0, 0, 2, 2, 2]	[2, 2, 2]
44	[0, 0, 0, 1, 2, 1, 1, 2, 0, 1]	[1, 1, 2, 2, 0]

この研究では、昨年の研究に引き続き
3000以下の自然数$N=4p(p:\text{奇素数})$を
分母として計算を行った。それを基に

- $p \equiv 1 \bmod 12$
- $p \equiv 5 \bmod 12$
- $p \equiv 7 \bmod 12$
- $p \equiv 11 \bmod 12$

を満たす4つの場合について
$\frac{1}{N}$を3進展開したときの2分割和の研究を行った。

★:.結果.:★

表より、$\frac{1}{N}(N=4p, p:$ 奇素数$)$の3進展開の2分割和は

①1が並ぶ場合
②2が並ぶ場合
③0〜2が不規則に並ぶ場合

の3タイプに場合分けする事が出来る。

★:.考察.:★

また、以下の推測が出来る。

$N=4p$(p:奇素数)となる自然数Nについて
$\frac{1}{N}$の3進展開の2分割和では

- $p \equiv 1 \bmod 12 \cdots$ タイプ①〜③の全てが起こる
- $p \equiv 5 \bmod 12 \cdots$ タイプ①が起こる
- $p \equiv 7 \bmod 12 \cdots$ タイプ②が起こる

(これについては昨年,先輩方が証明済)

- $p \equiv 11 \bmod 12 \cdots$ タイプ③が起こる

★:.$p \equiv 5 \bmod 12$.:★

《記号の定義と一般的な理論》

$\frac{1}{b}$をg進展開したとき、循環節の周期uをλを使って$\lambda(b)$と表す。
gとbが互いに素ならば、$u=\lambda(b)$は$\mathrm{mod} b$でのgの位数と同じ。
$g^u \equiv 1 \bmod b$を満たす最小正の数がuである。

$b=4p(p \geq 5,$奇素数$)$と$g=3$は互いに素なので

$$3^u \equiv 1 \bmod 4p$$

また、$3^2 \equiv 1 \bmod 4$より

$$\lambda(4)=2$$

$p > 3$について,4とpは互いに素なので

ベルヌーイの定理

gとbが互いに素で,bとcも互いに素なら

$$\lambda(bc) = \mathrm{lcm}(\lambda(b), \lambda(c))$$

より

$$\lambda(4p) = \mathrm{lcm}(\lambda(4), \lambda(p)) = \mathrm{lcm}(2, u)$$

ここで周期uが偶数のとき,$u = 2m$とすると

$$\lambda(4p) = u$$

また、周期の定義から

$$3^u = 3^{2m} \equiv 1, 3^m \not\equiv 1 \bmod 4p$$

法の条件を 4 と p に分けると

$$\begin{cases} 3^{2m} \equiv 1 \bmod p \\ 3^{2m} \equiv 1 \bmod 4 \end{cases}$$

が成り立つ。ここで

$$\begin{cases} x \equiv 3^m \bmod p & (1) \\ y \equiv 3^m \bmod 4 & (2) \end{cases}$$

とおくとき

$$\boxed{m : \text{偶数であることを証明する}}$$

《証明》

m : 奇数として矛盾を導く. 以下、$m = 2n + 1$とする.

(2)について

$3 \equiv -1 \bmod 4$より

$$y \equiv 3^m \equiv (-1)^m \equiv -1 \bmod 4$$

(1)について

xについて

$$\begin{cases} x \equiv 1 \bmod p & (3) \\ x \equiv -1 \bmod p & (4) \end{cases}$$

のどちらかが成り立つはずである.

平方剰余の定義

$\alpha, \beta \not\equiv 0 \bmod p$とする.

(1)$x^2 \equiv \alpha \bmod p$に解があるとき

$$\left(\frac{\alpha}{p}\right) = 1$$

(2)$x^2 \equiv \beta \bmod p$に解がないとき

$$\left(\frac{\beta}{p}\right) = -1$$

命題

p：奇素数、a, b：整数とする.

(1)$a \equiv b \bmod p$ならば

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$$

(2)整数a, bについて

$$\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$$

平方剰余の相互法則

2つの相異なる奇素数p, qに対して

$$\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$$

<(3) の場合>

$$x \equiv 3^m \equiv 3^{2n+1} \equiv 1 \bmod p$$

$$X = 3^n \text{ とおくと}$$

$$3X^2 \equiv 1 \bmod p$$

平方剰余の定義,命題より

$$\left(\frac{1}{p}\right) = \left(\frac{3X^2}{p}\right) = \left(\frac{3}{p}\right)\left(\frac{X}{p}\right)^2 = \left(\frac{3}{p}\right) = 1$$

また、相互法則より

$$\left(\frac{3}{p}\right)\left(\frac{p}{3}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

ここで$p \equiv 5 \bmod 12$より

$$p - 1 \equiv 4 \bmod 12$$
$$\frac{p-1}{2} \equiv 2 \bmod 6$$

よって$\frac{p-1}{2}$は偶数なので

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1$$
$$\therefore \left(\frac{3}{p}\right) = \left(\frac{p}{3}\right)$$

しかし、$\left(\frac{p}{3}\right)$については$p = 5 + 12k$より

$$p \equiv 2 \bmod 3$$

となるので

$$\left(\frac{p}{3}\right) = -1$$

これは$\left(\frac{3}{p}\right) = \left(\frac{p}{3}\right) = 1$に矛盾.
よって(3)のときmは偶数である.

(4)の場合も同様にして証明出来る.
以上より、mは偶数である.　[終]

以下、$m=2n$として

$$\begin{cases} x \equiv 3^m \bmod p & (1) \\ y \equiv 3^m \bmod 4 & (2) \end{cases}$$

のx,yの値を求める.

$\underline{y\text{について}}$

$3 \equiv -1 \bmod 4$より

$$y \equiv 3^m \equiv 3^{2m} \equiv (-1)^m \equiv 1 \bmod 4$$

$\underline{x\text{について}}$

$y \equiv 1 \bmod 4$より

$x \equiv 3^m \equiv 1 \bmod p$とすると

$$3^m \equiv 1 \bmod 4p$$

となり、位数$= 2m$に矛盾する.

$$\therefore x \equiv 3^m \equiv -1 \bmod p$$

以上より

$$\begin{cases} x \equiv 3^m \equiv -1 \bmod p \\ y \equiv 3^m \equiv 1 \bmod 4 \end{cases}$$

このとき2分割和に1が並ぶことを証明する

《証明》

既約の真分数$\frac{a}{b}$を3進展開することを考える.

(3とbは互いに素で、aとbも互いに素とする)

$a<b$なので$3a$をbで割ると

$$3a = q_1 b + r_1$$

更に$3r_1$をbで割ると

$$3r_1 = q_2 b + r_2$$

これを繰り返す.

$$
\begin{aligned}
3r_2 &= q_3 b + r_3, \\
&\vdots \\
3r_{j-1} &= q_j b + r_j, \\
3r_j &= q_{j+1} b + r_{j+1}
\end{aligned}
$$

bを法として考えると

$$
\begin{aligned}
3a &\equiv r_1 \bmod b, \\
3r_1 &\equiv r_2 \bmod b, \\
&\vdots \\
3r_{j-1} &\equiv r_j \bmod b
\end{aligned}
$$

上記のものを並び替えると

$$
\begin{gathered}
r_j \equiv 3r_{j-1} \bmod b, \\
\vdots \\
r_2 \equiv 3r_1 \bmod b, \\
r_1 \equiv 3a \bmod b
\end{gathered}
$$

$$\therefore r_j \equiv 3^j a \bmod b$$

r_j が $\mathrm{mod} b$ で考えるとき、公比3の等比数列となった.

ここで

$$
\begin{cases}
3^m \equiv -1 \bmod p \\
a = 1
\end{cases}
$$

より

$$r_{j+m} \equiv 3^{j+m}a \equiv -3^{j}a \equiv -r_j \bmod p$$
$$r_j + r_{j+m} \equiv 0 \bmod p$$

が成り立ち

$$r_j + r_{j+m} = k_j p$$

と正整数k_jで表せる.
更に$r_m + r_{2m} \equiv r_m - r_m \equiv 0 \bmod p$より

$$r_m + r_{2m} = k_m p$$
$$r_{2m} \equiv 3^{2m} \equiv 1 \equiv r_0 \bmod p$$
$$k_m = k_0$$

が成り立つ.

また$b=4p$だったので

$$3r_j = q_{j+1}b + r_{j+1} = 4pq_{j+1} + r_{j+1}$$
$$3r_{j+m} = 4pq_{j+m+1} + r_{j+m+1}$$

2式の左右の辺同士を加えると

$$3\left(r_j + r_{j+m}\right) = 4p\left(q_{j+1} + q_{j+m+1}\right) + \left(r_{j+1} + r_{j+m+1}\right)$$
$$3k_jp = 4p\left(q_{j+1} + q_{j+m+1}\right) + k_{j+1}p$$
$$3k_j = 4\left(q_{j+1} + q_{j+m+1}\right) + k_{j+1}$$

ここで$q_j + q_{j+m} = Q_j$とおくと

$$3k_j = 4Q_{j+1} + k_{j+1}$$
$$3k_j - k_{j+1} = 4Q_{j+1}$$

これらを$j = 0, 1, 2, \cdots$について考えると

$$\begin{gathered} 3k_0 - k_1 = 4Q_1 \\ 3k_1 - k_2 = 4Q_2 \\ \vdots \\ 3k_{m-1} - k_m = 4Q_m \end{gathered}$$

最初の式の両辺に3^{m-1}、次の式の両辺に3^{m-2}をかけていきこれらを加えると

$$3^{m-1}(3k_0 - k_1) + 3^{m-2}(3k_1 - k_2) + \cdots + 3k_{m-1} - k_m$$
$$= 4\left(3^{m-1}Q_1 + 3^{m-2}Q_2 + \cdots + Q_m\right)$$

$$3^m k_0 - k_m = 4\left(3^{m-1}Q_1 + 3^{m-2}Q_2 + \cdots + Q_m\right)$$
$$3^m k_0 - k_0 = 4\left(3^{m-1}Q_1 + 3^{m-2}Q_2 + \cdots + Q_m\right)$$
$$(3^m - 1)\, k_0 = 4\left(3^{m-1}Q_1 + 3^{m-2}Q_2 + \cdots + Q_m\right)$$

$3^{m-1}Q_1 + 3^{m-2}Q_2 + \cdots + Q_m$ は数字 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_m$ を並べて 3 を超えたら繰り上がりを考えた数になっている.

これを$<Q_1, Q_2, \cdots, Q_m>$と書くと
$Q_j = q_j + q_{j+m}$だったので
これは循環節の2分割和になっている.

特に各jについて$Q_j < 3$なら繰り上がりがおきないので

$$<Q_1, Q_2, \cdots, Q_m> = (Q_1 Q_2 \cdots Q_m)_3$$

2分割和をZとおくと

$$<Q_1, Q_2, \cdots, Q_m> = Z$$

となり

$$Z = \frac{3^m - 1}{4} k_0$$

と表せる.

$\boxed{k_0 \text{の決定}}$

$r_0 + r_m = k_0 p$,及び余りの性質から

$$r_0 = a = 1, r_m \leq 4p - 1$$

よって$k_0 p \leq 4p$より

$$k_0 \leq 4$$

一方

$$k_0 p = r_0 + r_m \equiv 1 + 3^m \equiv 1 + 1 \equiv 2 \bmod 4$$

$p \equiv 5 \bmod 12$なので

$$p \equiv 1 \bmod 4$$

$$\therefore k_0 \equiv 2 \bmod 4$$

$k_0 \leq 4$より

$$k_0 = 2$$

よって

$$Z = \frac{3^m - 1}{4} k_0 = \frac{3^m - 1}{2} = (1111 \cdots 1)_3$$

以上より、2分割和に1が並ぶことが示された.　　[終]

★:.$p \equiv 11 \bmod 12$.:★

パターン③では、ただ不規則に0〜2の数字が並ぶのではなく
$\frac{l}{p}$(l : 正整数)を小数に3進展開したときの循環節が
現れているのではないかと予想する。

予想

$\frac{1}{4p}$(p : 奇素数, $p \equiv 11 \bmod 12$)の3進展開での2分割和は
$\frac{l}{p} = \frac{6n}{12n-1}$($n = 1, 2, \cdots$)を3進展開した循環節に等しい.

これについては現在検証中である.