$4p$ と $9p$ を分母とする分数の小数展開について

学習院大学理学部数学科 廣瀬朋貴

＜方針＞

①$\frac{1}{4p}$を5進法で展開し、$\frac{1}{3p},\frac{1}{9p}$を10進法で展開する。

その結果で循環する数、素数pの階差、リストの長さ、並ぶ数の２分割和等の性質、法則について考察する。

②$\frac{2}{9p},\frac{4}{9p},\frac{5}{9p},\frac{7}{9p},\frac{8}{9p},$について10進展開を行う。
循環する数でグループ分けをし、それぞれの特徴に着目する。

$\frac{1}{4p}$ の5進展開について

任意の素数pに対して2が並ぶ。(1通りのみ)

$\frac{1}{3p}$ の10進展開について

3が並ぶ素数p {11,17,23,29,47,59,89,101,113,131,137,149, 167,179,197,233,251,257,263,269,281,293,$\cdots$} と
6が並ぶ素数p {7,13,19,61,73,97,103,109,127,139,157, 181,193,211,223,229,241,$\cdots$} の2種類に分けることができる。
この結果に注目すると、3が並ぶ素数p、6が並ぶ素数pをそれぞれ数列で表すことができる。

『3が並ぶ素数p：$6k+5$　　(k:自然数)』
『6が並ぶ素数p：$6k+1$　　(k:自然数)』

→このように2通りの型で示せる。

$\frac{1}{9p}$の10進展開について

2分割和に1が並ぶ素数p $\{11,29,47,101,137,263,281,\cdots\}$、
2分割和に2が並ぶ素数p $\{19,73,109,127,181,\cdots\}$、
2分割和に4が並ぶ素数p $\{23,59,113,131,149,167,257,293,\cdots\}$、
2分割和に5が並ぶ素数p $\{13,103,139,157,193,211,229,\cdots\}$、
2分割和に7が並ぶ素数p $\{17,89,179,197,233,251,269,\cdots\}$、
2分割和に8が並ぶ素数p $\{7,61,97,223,241,\cdots\}$ の6種類に分けることができる。
→このように6通りの型で示せる。
この結果に注目すると、1が並ぶ素数p、2が並ぶ素数p、4が並ぶ素数p、5が並ぶ素数p、7が並ぶ素数p、
8が並ぶ素数pをそれぞれ数列で表すことができる。

『1が並ぶ素数p：$18k+11$　　　(k:自然数)』
『2が並ぶ素数p：$18k+1$　　　(k:自然数)』
『4が並ぶ素数p：$18k+5$　　　(k:自然数)』
『5が並ぶ素数p：$18k+13$　　　(k:自然数)』
『7が並ぶ素数p：$18k+17$　　　(k:自然数)』
『8が並ぶ素数p：$18k+7$　　　(k:自然数)』

→このように6通りの型で示せた。
この「$18k+a$」のaの値(1,5,7,11,13,17)は18と互いに素な自然数になる。

$\frac{1}{9p}$の10進展開の考察

表で行ったこと

①.$\frac{1}{9p}$を10進展開する。

→その結果分かることは$\{1,2,4,5,7,8\}$が並ぶ素数pにそれぞれグループ分けをすることができることである。

1が並ぶ素数pは$\{11,29,47,101,137,263,281\}$　2が並ぶ素数pは$\{19,73,109,127,181\}$

4が並ぶ素数pは$\{23,59,113,131,149,167,257,293\}$　5が並ぶ素数pは$\{13,103,139,157,193,211,229\}$

7が並ぶ素数pは$\{17,89,179,197,233,251,269\}$　8が並ぶ素数pは$\{7,61,97,223,241\}$

②.　この素数pを18で割る。
→割ったときの余りに着目する。
・1が並ぶ素数p $\{11,29,47,101,137,263,281\}$ を18で割ると余りは全て11になる。
・2が並ぶ素数p $\{19,73,109,127,181\}$ を18で割ると余りは全て1になる。
・4が並ぶ素数p $\{23,59,113,131,149,167,257,293\}$ を18で割ると余りは全て5になる。
・5が並ぶ素数pは $\{13,103,139,157,193,211,229\}$ を18で割ると余りは全て13になる。
・7が並ぶ素数pは $\{17,89,179,197,233,251,269\}$ を18で割ると余りは全て17になる。
・8が並ぶ素数pは $\{7,61,97,223,241\}$ を18で割ると余りは全て7になる。

③.出てきた余り（11,1,5,13,17,7）に、並ぶ数（1,2,4,5,7,8）をそれぞれかける。

→出てくる積に着目する。

11*1=11　　1*2=2

5*4=20　　13*5=65

17*7=119 7*8=56

④.この積の値をmod9で見る。

11mod9=2　　2mod9=2

20mod9=2　　65mod9=2

119mod9=2　　56mod9=2

→mod9を取ると全て2になる。

上記①～④で行った作業を$\frac{2}{9p}$,$\frac{4}{9p}$,$\frac{5}{9p}$,$\frac{7}{9p}$,$\frac{8}{9p}$,に関しても同様に行ってみる。

『$\frac{2}{9p}$：mod9を取ると全て4になる。』
『$\frac{4}{9p}$：mod9を取ると全て8になる。』
『$\frac{5}{9p}$：mod9を取ると全て1になる。』
『$\frac{7}{9p}$：mod9を取ると全て5になる。』
『$\frac{8}{9p}$：mod9を取ると全て7になる。』