# あみだくじの横線の数

牧口　晃平

２００８年１１月１３日

# 1　目的

縦棒が n 本のあみだくじの定める置換には、$n!$ 通りの種類がある。一つのあみだくじを $X$ とし、そのあみだくじを作るための横棒の本数を $f(A)$ とする。
$f(X)$ が最小となるようなものについての研究をする。

# 2　方法

## 2.1　概要

例えば, スタートが $(1, 2, 3)$ ゴールが $(3, 1, 2)$, となるあみだくじでは、必要最低限の横棒の本数は２本である。（図１）

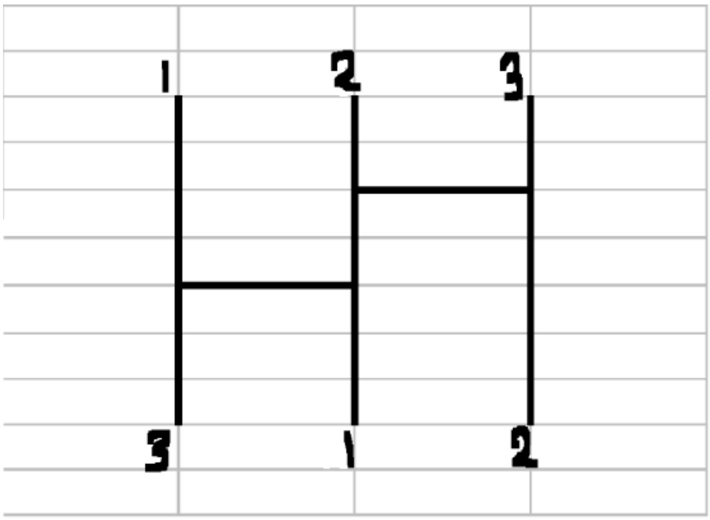


図 1: あみだの例

そして、縦棒が３本のあみだくじは、上のものを含めて６種類あり、横棒の本数で整理すると表１のようになる。

表 1: 縦棒が３本の場合

| 横棒の数 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 種類 | １種類 | ２種類 | ２種類 | １種類 |

この表を縦棒が４本の場合、５本の場合…と増やしてゆき、性質を調べる。

## 2.2　手順

### 2.2.1　概要

一つののあみだくじにつき、一つのリストを対応させる。あみだくじの縦線に左から番号を振り、「どの番号に行き着くか」をリストの要素とする。例えば（図１）のようなあみだくじであれば、

（２，３，１）

というリストで表される。

縦線の本数が $n$ 本のあみだくじであれば $n!$ 通りの種類が存在するので、その全てを permutation/2 と delete0/1 を用いて作り出す。

そのそれぞれについて横線の本数をカウントするために h/1 を用いる。これは、あみだくじの横線の本数は、スタートとゴールを線で結んだ際の交点の個数と一致することを用いている。

例えば、図２のような例であれば、交点は２箇所であるから、必要な横線は２本である。

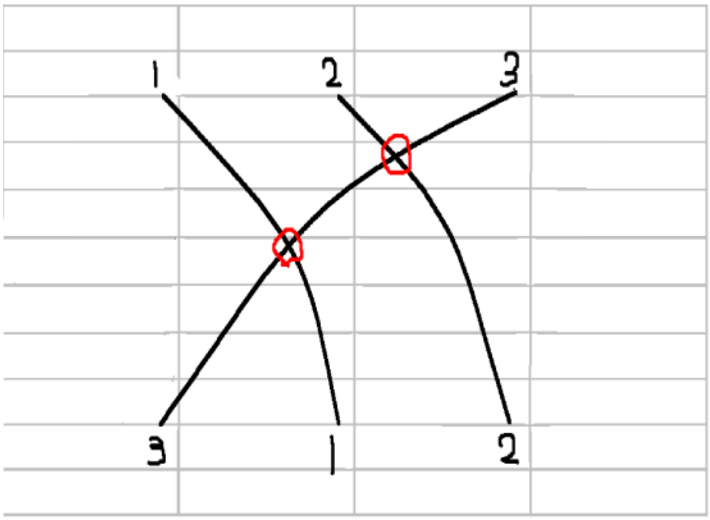


図 2: スタートとゴールを線で結ぶ

この交点の個数については、それぞれの線について「自分より右側の線と交わっている否か」という視点で数え上げる。図２の例でいえば、A は B とは交わっていないが、C とは交わっている。B は C と交わっている。C は（当然だが）自分より右側がない。従って交点の個数は１＋１＋０＝２となる。

以下は実際のコードと実行結果の例、そしてそれらの集計結果である。特筆すべきは PROLOG という言語のシンプルさであろう。$n$ の値によらずに $[1, 2, 3, \cdots, n]$ の全順列を生成するプログラムが、たった４行で書けるのである。

#### 2.2.2 permutation/2,delete0/1(順列（あみだくじ）の作成)

```
permutation([],[]).
permutation([A—X1],Y):-delete0(Y1=Y-A),permutation(X1,Y1).
delete0(X=[A—X]-A).
delete0([B—Y]=[B—X]-A):-delete0(Y=X-A).
```

これらの述語は自分で定義したわけではなく、飯高先生のテキストに載っていたものをそのまま拝借した。
前述した通り、数学研究における PROLOG の有用性が分かるものである。

#### 2.2.3 h/1(横棒の本数のカウント)

```
h([X—L]):-h0(X,L,0,S),
  h(L).
h([]).
h0(X,[K—L],R,S):-
    (X¿K)-¿R1 is R+1,
    h0(X,L,R1,S);
    R1 is R+0,
    h0(X,L,R1,S).
h0(X,[],S,S):-write(S),tab(1).
```

h/1 では要素として受け取るものをリスト１つだけにするため、補助的述語 h0/4 を用意し、主な処理はそちらで行った。

#### 2.2.4 実行結果の例

```
?- permutation(X,[1,2,3]),h(X),nl,fail.
0 0 0
0 1 0
1 0 0
1 1 0
2 0 0
2 1 0

NO
```

この例では、横棒の本数が上から０本、１本、１本、２本、２本、３本となり、「２．１概要」における、表１の結果が得られる。

このようにして [1,2,3,4]、[1,2,3,4,5]···[1,2,3,4,5,6,7,8] についてデータを得る。縦棒の数が９本を越えると、あみだの種類が膨大になり、表計算ソフトで集計しきれなくなってしまったため、断念した。

#### 2.2.5　集計

　こうして得られた結果を、表計算ソフトで集計すると、表２のような結果となった。この表から何らかの性質を見出し、考察を行うのが本研究の目的である。

表 2: 集計結果（単位：種類）

| 縦棒 \ 横棒 | 0 本 | 1 本 | 2 本 | 3 本 | 4 本 | 5 本 | 6 本 | 7 本 | 8 本 | 9 本 | 10 本 | 11 本 | ··· |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 本 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ··· |
| 2 本 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ··· |
| 3 本 | 1 | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ··· |
| 4 本 | 1 | 3 | 5 | 6 | 5 | 3 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | ··· |
| 5 本 | 1 | 4 | 9 | 15 | 20 | 22 | 20 | 15 | 9 | 4 | 1 | 0 | ··· |
| 6 本 | 1 | 5 | 14 | 29 | 49 | 71 | 90 | 101 | 101 | 90 | 71 | 49 | ··· |
| 7 本 | 1 | 6 | 20 | 49 | 98 | 169 | 259 | 359 | 455 | 531 | 573 | 573 | ··· |
| 8 本 | 1 | 7 | 27 | 76 | 176 | 343 | 602 | 961 | 1415 | 1940 | 2493 | 3017 | ··· |

# 3　考察

## 3.1　考察１

まず、縦棒が t 本、横棒が y 本のあみだの総数を $S_{(t,y)}$ とする。すると

$$S_{(t,y)} = S_{(t-1,y)} + S_{(t,y-1)} \qquad (t \geq 2, y \geq 1, t \geq y+1)$$

が成り立つことが予想される。このことについての証明を行う。

#### 3.1.1　$S_{(5,4)}$ について

具体例として、

$$S_{(5,4)} = S_{(4,4)} + S_{(5,3)}$$

についての考察を行う。（表３）はそれぞれのあみだの形と、その対応関係をまとめたものである。交わる本数とは、それぞれの線が、自分より右側の線と何回交わるかを表している。

#### 3.1.2　考察２

考察１の式に似ているが、

$$S_{(t,y)} = S_{(t-1,y)} + S_{(t,y-1)} - 1 \qquad (t = y)$$

が成り立つことが予想される。このことについて証明を行う。

表 3: 対応関係

| 縦４本横４本 | 交わる本数 | | 縦５本横４本 | 交わる本数 |
|---|---|---|---|---|
| 2431 | 1210 | ⇔ | 13542 | 01210 |
| 3241 | 2110 | ⇔ | 14352 | 02110 |
| 3412 | 2200 | ⇔ | 14523 | 02200 |
| 4132 | 3010 | ⇔ | 15243 | 03010 |
| 4213 | 3100 | ⇔ | 15324 | 03100 |
| 縦５本横４本 | | | | |
| 12543 | 00210 | ⇔ | 21543 | 10210 |
| 13452 | 01110 | ⇔ | 23451 | 11110 |
| 13524 | 01200 | ⇔ | 23514 | 11200 |
| 14253 | 02010 | ⇔ | 24153 | 12010 |
| 14325 | 02100 | ⇔ | 24315 | 12100 |
| 15234 | 03000 | ⇔ | 25134 | 13000 |
| 21453 | 10110 | ⇔ | 31452 | 20110 |
| 21534 | 10200 | ⇔ | 31524 | 20200 |
| 23154 | 11010 | ⇔ | 32154 | 21010 |
| 23415 | 11100 | ⇔ | 32415 | 21100 |
| 24135 | 12000 | ⇔ | 34125 | 22000 |
| 31254 | 20010 | ⇔ | 41253 | 30010 |
| 31425 | 20100 | ⇔ | 41325 | 30100 |
| 32145 | 21000 | ⇔ | 42135 | 31000 |
| 41235 | 30000 | ⇔ | 51234 | 40000 |