

ピタゴラス数とロバート行列

学習院大学理学部数学科

成田 光正

①目的

プロログを使って、200以下のピタゴラス数の表を作る。

②手順

3 * 3行列の積や3 * 3行列の逆行列を **prolog** で求め、いくつかのピタゴラス数を用いてロバート行列を求める。

逆に、ピタゴラス数にロバート行列をかけて、1組の1番小さい値が200以下のピタゴラス数を求める。

ピタゴラス数

$c-b=1$ の時

3	5	4
5	13	12
7	25	24
9	41	40
11	61	60
⋮	⋮	⋮

$c-b=9$ の時

15	17	8
21	29	20
33	65	56
39	89	80
51	149	140
⋮	⋮	⋮

$c-b=49$ の時

⋮	⋮	⋮
63	65	16
77	85	36
91	109	60
105	137	88
119	169	120
⋮	⋮	⋮

$c-b=289$ の時

629	829	540
663	905	616
697	985	696
731	1069	780
765	1157	868
⋮	⋮	⋮

行列のかけ算を利用し、ピタゴラス数の一部を使って、ロバート行列を求める。

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 21 & 20 & 29 \\ 119 & 120 & 169 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 21 & 20 & 29 \\ 119 & 120 & 169 \\ 697 & 696 & 985 \end{pmatrix} \dots *$$

ロバート行列を求める為、 $3 * 3$ 行列の積や $3 * 3$ 行列の逆行列Bを求める。

3結果

逆行列Bは

$$B = [[-100, -76, 16], [-98, -88, 18], [140, 116, -24]]$$

$$B = \begin{pmatrix} -100 & -76 & 16 \\ -98 & -88 & 18 \\ 140 & 116 & -24 \end{pmatrix}$$

となる。

逆行列Bを用いて、*からロバート行列Aを求めると、

$$A = [[1.0, 2.0, 2.0], [2.0, 1.0, 2.0], [2.0, 2.0, 3.0]]$$

これよりロバート行列は以下のようになる。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ピタゴラス数に求めたロバート行列をかけた数もピタゴラス数になることを証明します。

ピタゴラス数 (x, y, z)

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$(x', y', z') = (x, y, z) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

を計算すると

$$x' = x + 2y + 2z, \quad y' = 2x + y + 2z, \quad z' = 2x + 2y + 3z$$

$$x'^2 + y'^2 = 5x^2 + 5y^2 + 8z^2 + 8xy + 12xz + 12yz$$

$$= 13z^2 + 8xy + 12xz + 12yz$$

$$z'^2 = 13z^2 + 8xy + 12xz + 12yz$$

これより、 $x'^2 + y'^2 = z'^2$ となり、証明終わり。

得られたロバート行列を用いて、200以下のピタゴラス数
求める。

$$\text{例 1} \quad (0,1,1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (4,3,5)$$

$$\text{例 2} \quad (3,4,5) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (21,20,29) \quad \vdots$$

ピタゴラス数は正の組だけではなく、負の数を含む組も考えられるので全部で $(3, 4, 5), (-3, 4, 5), (3, -4, 5), (3, 4, -5), (-3, 4, -5), (-3, -4, 5), (3, -4, -5), (-3, -4, -5)$ の8組のピタゴラス数でロバート行列をかける。

$$\text{例 3} \quad (-3, 4, 5) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (15, 8, 17)$$

$$\text{例 4} \quad (-3, -4, 5) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (-1, 0, 1)$$

これらのプログラムから得られた結果を表にまとめる。

[1,0,1] の場合

a	b	c
3	4	5
21	20	29
119	120	169
⋮	⋮	⋮

[-3,4,5] の場合

a	b	c
15	8	17
65	72	97
⋮	⋮	⋮

$[3, -4, 5]$ の場合

a	b	c
5	12	13
55	48	73
297	304	425
\vdots	\vdots	\vdots

$[5, 12, 13]$ の場合

a	b	c
55	48	73
\vdots	\vdots	\vdots

$[-5, 12, 13]$ の場合

a	b	c
45	28	53
\vdots	\vdots	\vdots

$[5, -12, 13]$ の場合

a	b	c
7	24	25
105	88	137
\vdots	\vdots	\vdots

$[7, 24, 25]$ の場合

a	b	c
105	88	137
\vdots	\vdots	\vdots

$[-7, 24, 25]$ の場合

a	b	c
91	60	109
\vdots	\vdots	\vdots

$[7, -24, 25]$ の場合

a	b	c
9	40	41
\vdots	\vdots	\vdots

$[8, 15, 17]$ の場合

a	b	c
72	65	97
\vdots	\vdots	\vdots

$[-8, 15, 17]$ の場合

a	b	c
56	33	65
\vdots	\vdots	\vdots

$[8, -15, 17]$ の場合]

a	b	c
12	35	37
\vdots	\vdots	\vdots

$[-9, 40, 41]$

a	b	c
153	104	185
\vdots	\vdots	\vdots

[9, -40, 41 の場合]

a	b	c
11	60	61
\vdots	\vdots	\vdots

[11, -60, 61] の場合

a	b	c
13	84	85
\vdots	\vdots	\vdots

[13, -84, 85] の場合

a	b	c
15	112	113
\vdots	\vdots	\vdots

$[15, -112, 113]$ の場合

a	b	c
17	144	145
\vdots	\vdots	\vdots

$[17, -144, 145]$ の場合

a	b	c
19	180	181
\vdots	\vdots	\vdots

ロバート行列を用いて200以下のピタゴラス数を **prolog** で作り出した。

200以下のピタゴラス数

a	b	c
0	1	1
3	4	5
5	12	13
7	24	25
8	15	17
9	40	41
11	60	61
12	35	37
13	84	85
15	112	113

16	63	65
17	144	145
19	180	181
20	21	29
20	99	101
24	143	145
28	45	53
28	195	197
33	56	65
36	77	85
39	80	89
44	117	125
48	55	73
51	140	149
52	165	173

60	91	109
65	72	97
85	132	157
88	105	137
95	168	193
104	153	185
119	120	169

④考察

一番簡単なピタゴラス数 $(0, 1, 1)$ にロバート行列をかけることで、200以下のピタゴラス数がすべて32個作り出せることがわかった。