調和数について

発表者

❀ 学習院大学理学部数学科4年
❀ 05-043-056 山田　卓矢
❀ 2009年2月3日(火曜日)発表

重要

調和数にはふたつの定義がある。
それは、*harmonic divisor number* と *Ore's harmonic number* のふたつであり両方とも完全数の一般化である。

定　義

自然数 m が *harmonic divisor number* であるとは

$$V_{(m)} = \sum_{k|m}^{m} \frac{1}{k}$$

とおくとき、$V_{(m)}$ が自然数となるときである。

簡単な例 ($m=6$ のとき)

計算の過程

$$V_{(6)}=\sum_{k|6}^{6}\frac{1}{k}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{12}{6}=2$$

よって $V_{(6)}$ が自然数となったので6は *harmonic divisor number* となる。100万まで求めた結果は次のようになった。

100万までの *harmonic divisor number*

m	$V_{(m)}$	素因数分解
1	1	1×1
6	2	2×3
28	2	$2^2\times 7$
120	3	$2^3\times 3\times 5$
496	2	$2^4\times 31$

m	$V_{(m)}$	素因数分解
672	3	$2^5\times 3\times 7$
8128	2	$2^6\times 127$
30240	4	$2^5\times 3^3\times 5\times 7$
32760	4	$2^3\times 3^2\times 5\times 7\times 13$
523776	3	$2^9\times 3\times 11\times 31$

定　義

自然数mが$Ore's\ harmonic\ number$であるとは、約数の調和平均が自然数となるときである。式で書くと

$$W_{(m)} = \frac{\sigma_0(m) \times m}{\sigma_1(m)}$$

とおくとき、$W_{(m)}$が自然数となるときである。ここで、$\sigma_0(m)$:mの約数の個数、$\sigma_1(m)$:mの約数の総和を意味する。

定　義

$$\sigma_d(m) = \sum_{k|m} m^d$$

と定義する。

このとき次のことが一般的に知られている。

$(\sigma_d(m))$について

p,qは自然数で互いに素のとき

$$\sigma_d(pq) = \sigma_d(p) \times \sigma_d(q)$$

が成り立つことが知られている。

$\boxed{\text{簡単な例}(m = 28\text{のとき})}$

計算の過程

28の約数は$[1, 2, 4, 7, 14, 28]$の6個なので$\sigma_0(28) = 6$である。

$$W_{(28)} = \frac{\sigma_0(28) \times 28}{\sigma_1(28)} = \frac{6 \times 28}{1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28} = \frac{168}{56} = 3$$

よって$W_{(28)}$が自然数となったので28は$Ore's\ harmonic\ number$となる。

告知

以降$Ore's\ harmonic\ number$についてわかったことを発表します。

$SWI-Prolog$を用いて100万までの調和数を求めた。結果は次のようになった。

100万までの $Ore's\ harmonic\ number$ その①

m	$W_{(m)}$	素因数分解
1	1	1×1
6	2	2×3
28	3	$2^2 \times 7$
140	5	$2^2 \times 5 \times 7$
270	6	$2 \times 3^3 \times 5$
496	5	$2^4 \times 31$
672	8	$2^5 \times 3 \times 7$
1638	9	$2 \times 3^2 \times 7 \times 13$
2970	11	$2 \times 3^3 \times 5 \times 11$
6200	10	$2^3 \times 5^2 \times 31$
8128	7	$2^6 \times 127$

100万までの$Ore's\ harmonic\ number$その②

m	$W_{(m)}$	素因数分解
8190	15	$2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$
18600	15	$2^3 \times 3 \times 5^2 \times 31$
18620	14	$2^2 \times 5 \times 7^2 \times 19$
27846	17	$2 \times 3^2 \times 7 \times 13 \times 17$
30240	24	$2^5 \times 3^3 \times 5 \times 7$
32760	24	$2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$
55860	21	$2^2 \times 3 \times 5 \times 7^2 \times 19$
105664	13	$2^6 \times 13 \times 127$
117800	19	$2^3 \times 5^2 \times 19 \times 31$
167400	27	$2^3 \times 3^3 \times 5^2 \times 31$
173600	25	$2^5 \times 5^2 \times 7 \times 31$

100万までの$Ore's\ harmonic\ number$その③

m	$W_{(m)}$	素因数分解
237510	29	$2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13 \times 29$
242060	26	$2^2 \times 5 \times 7^2 \times 13 \times 19$
332640	44	$2^5 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11$
360360	44	$2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$
539400	29	$2^3 \times 3 \times 5^2 \times 29 \times 31$
695520	46	$2^5 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 23$
726180	39	$2^2 \times 3 \times 5 \times 7^2 \times 13 \times 19$
753480	46	$2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13 \times 23$
950976	27	$2^6 \times 3^2 \times 13 \times 127$

得られた調和数から100万をこえる調和数を探した。得られた結果の範囲で次のようなものを見つけることができた。

2連続調和数

28と140はともに調和数である。これら二つの数には

$$140 = 5 \times 28$$

という関係がある。つまりある調和数と適当な素数の積が調和数になることがある。

2連続調和数素数の場合その①

m	$\sigma_0(m)$	$\sigma_1(m)$	$W_{(m)}$	$m/W_{(m)}$
28	6	56	3	$9.33\cdots$
$140(=5\times 28)$	12	336	5	28

6200、167400はともに調和数である。これら二つの数には

$$167400 = 27 \times 6200$$

という関係がある。前のページでは素数であったが合成数との積も調和数になることがあることを示している。

2連続調和数合成数の場合その①

m	$\sigma_0(m)$	$\sigma_1(m)$	$W_{(m)}$	$m/W_{(m)}$
6200	24	14880	10	620
$167400(=27 \times 6200)$	96	595200	27	6200

このようにある調和数と適当な自然数の積も調和数になる組を2連続調和数ということにします。2連続調和数のときだけ、掛ける自然数が素数の場合と合成数の場合に分けた。

その他の結果(素数のとき)

2連続調和数素数の場合その②

m	$\sigma_0(m)$	$\sigma_1(m)$	$W_{(m)}$	$m/W_{(m)}$
270	16	720	6	45
$2970(=11\times 270)$	32	8640	11	270

2連続調和数素数の場合その③

m	$\sigma_0(m)$	$\sigma_1(m)$	$W_{(m)}$	$m/W_{(m)}$
8506400	144	24998400	49	173600
$825120800(=97\times 8506400)$	288	2449843200	97	8506400

このタイプは全11組見つけることができた。

その他の結果(合成数のとき)

2連続調和数合成数の場合その②

m	$\sigma_0(m)$	$\sigma_1(m)$	$W_{(m)}$	$m/W_{(m)}$
18620	36	47880	14	1330
$726180(= 39 \times 18620)$	144	2681280	39	18620

2連続調和数合成数の場合その③

m	$\sigma_0(m)$	$\sigma_1(m)$	$W_{(m)}$	$m/W_{(m)}$
115048440	288	424794240	78	1474980
$31638321000(= 275 \times 115048440)$	1152	132535802880	275	115048440

このタイプは全27組見つけることができた。

3連続調和数

6200、117800、5772200、これら三つは調和数である。これらの調和数には次の関係がある。

$$6200 \xrightarrow{\times 19} 117800 \xrightarrow{\times 49} 5772200$$

FIGURE 1. 生成の様子

このようにある調和数に適当な数を掛けたものが調和数となり、得られた調和数に適当な数を掛けたものがまた調和数となる組を3連続調和数ということにします。

3連続調和数その①

m	$\sigma_0(m)$	$\sigma_1(m)$	$W_{(m)}$	$m/W_{(m)}$
6200	24	14880	10	620
$117800(= 19 \times 6200)$	48	297600	19	6200
$5772200(= 49 \times 117800)$	144	16963200	49	117800

3連続調和数その②

m	$\sigma_0(m)$	$\sigma_1(m)$	$W_{(m)}$	$m/W_{(m)}$
8128	14	16256	7	$1161.1\cdots$
$105664(=13\times 8128)$	28	227584	13	8128
$4754880(=45\times 105664)$	168	17751552	45	105664

3連続調和数その③

m	$\sigma_0(m)$	$\sigma_1(m)$	$W_{(m)}$	$m/W_{(m)}$
950976	84	2958592	27	$35221.3\cdots$
$80832960(=85\times 950976)$	336	319527936	85	950976
$13660770240(=169\times 80832960)$	672	54319749120	169	80832960

このタイプは4組発見できた。

分岐調和数

　6200、117800、167400、これら三つは調和数である。これらを6200を基準に考えると次のような関係がある。

$$\begin{tikzcd} & 117800 \\ 6200 \arrow[ur, "\times 19"] \arrow[dr, "\times 27"'] & \\ & 167400 \end{tikzcd}$$

Figure 2. 分岐の様子

　このように、ある調和数と異なる2つの自然数との積が互いに調和数になることがある。このような調和数の組を分岐調和数ということにします。このタイプは他に4組発見することができた。

分岐調和数その①

m	$\sigma_0(m)$	$\sigma_1(m)$	$W_{(m)}$	$m/W_{(m)}$
8190	48	26208	15	546
$237510(= 29 \times 8190)$	96	786240	29	8190
$360360(= 44 \times 8190)$	192	1572480	44	8190

分岐調和数その②

m	$\sigma_0(m)$	$\sigma_1(m)$	$W_{(m)}$	$m/W_{(m)}$
46683000	512	209664000	114	409500
$15358707000(= 329 \times 46683000)$	1536	71705088000	329	46683000
$18999981000(= 407 \times 46683000)$	2048	95606784000	407	46683000

分岐調和数その③

m	$\sigma_0(m)$	$\sigma_1(m)$	$W_{(m)}$	$m/W_{(m)}$
81695250	384	298771200	105	778050
$27122823000 (= 332 \times 81695250)$	1536	125483904000	332	81695250
$37906596000 (= 464 \times 81695250)$	2304	188225856000	464	81695250

分岐調和数その④

m	$\sigma_0(m)$	$\sigma_1(m)$	$W_{(m)}$	$m/W_{(m)}$
163390500	576	697132800	135	1210300
$77120316000 (= 472 \times 163390500)$	2304	376451712000	472	163390500
$80551516500 (= 493 \times 163390500)$	2304	376451712000	493	163390500

2連続調和数のうち掛ける自然数が素数のときの結果から次のことが言えそうである。

推測

m_1、m_2 は2連続調和数で m_1 から m_2 が生成され $m_2 = pm_1$(pは素数) とする。このとき、次のことが観察された。

❋ $\sigma_0(m_2)=2\sigma_0(m_1)$(証明済)

✢ $W_{(m_2)} = 2W_{(m_1)} - 1$(未解決)

✇ $\frac{\sigma_1(m_2)}{\sigma_1(m_1)} = 2W_{(m_1)}$(未解決)

　具体的な例で説明する。下は2連続調和数で掛ける自然数が素数のときの例のひとつである。

2連続調和数素数の場合その④

m	$\sigma_0(m)$	$\sigma_1(m)$	$W_{(m)}$	$m/W_{(m)}$
8190	48	26208	15	546
$237510(= 29 \times 8190)$	96	786240	29	8190

　このとき、$m_1 = 8190$、$m_2 = 237510$である。また$W_{(8190)} = 15$、$W_{(237510)} = 29$、$\sigma_0(8190) = 48$、$\sigma_0(237510) = 96$、$\sigma_1(8190) = 26208$、$\sigma_1(237510) = 786240$である。

　これから、$\sigma_0(m)$は表から$48 \times 2 = 96$となっている。$W_{(m)}$も$15 \times 2 - 1 = 29$となっている。$\sigma_1(m)$も$\frac{786240}{26208} = 30 = 2 \times 15$より確かに推測をみたす。

FIN