フィボナッチ数列の逆数の和の分母に関する研究

五十嵐 才蔵
学習院大学理学部数学科

平成 22 年 2 月 1 日

目 次

1 目的 **2**

2 方法 **3**
2.1 フィボナッチ数列を求めるプログラム 3
2.2 フィボナッチ数列の逆数の和を求めるプログラム 3
2.3 素因数分解したときの２の指数を導くプログラム 3
2.4 素因数分解したときの３の指数を導くプログラム 3
2.5 フィボナッチ数列のｎ項目の数と，２の指数，３の指数を一気に求めるプログラム 4
2.6 分数を約分するプログラム 4
2.7 素因数分解した数を全て表示するプログラム 5

3 結果 **6**
3.1 プログラミングの入力方法 6
3.2 $e(k)$ を表す表 7

4 考察 **13**
4.1 α_k の法則 13
4.2 $e(k)$ の法則 14
4.2.1 証明 15

5 感想 **16**

1　目的

　フィボナッチ数列の逆数の和を既約分数で表し，その分母を研究する
フィボナッチ数列 $\{F_n\}$ とは初項と第 2 項を $F_1 = 1, F_2 = 1$ とし漸化式 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ を満たす数列である.
そしてフィボナッチ数列の逆数の和を既約分数で表し $\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{F_n} = \frac{b_k}{a_k}$ とする.
そして分母 $a_k = 2^{e(k)} \times$ 奇数 と表すとき，$e(k)$ を研究することを目的とする.

2　方法

2.1　フィボナッチ数列を求めるプログラム

```
/** fibonacci matubi saiki **/
fb(N,F):- N>0,fb_aux([N,F],1,1,0).
fb_aux([N,F],N,F,_).
fb_aux(Const,N,F,F1):-
N1 is N + 1,
F0 is F + F1,
fb_aux(Const,N1,F0,F).
```

2.2　フィボナッチ数列の逆数の和を求めるプログラム

```
/** fib_gyakusuu **/
fib_g(N,B/A):- N>0,fib_gaux([N,B/A],1,1/1).
fib_gaux([N,B/A],N,B/A).
fib_gaux(Const,N,B/A):-
N1 is N + 1,fb(N1,F1),
A1 is A * F1,
B1 is B * F1 + A,
fib_gaux(Const,N1,B1/A1).
```

2.3　素因数分解したときの２の指数を導くプログラム

```
/** ipusiron no 2 **/
nirui(2,1).
nirui(N,E):- (N=:= N//2*2->
(   N1 is N//2,
nirui(N1,E1),
E is E1+1);E=0).
```

2.4　素因数分解したときの３の指数を導くプログラム

```
/** ipusiron no 3 **/
sanrui(3,1).
sanrui(N,E):- (N=:= N//3*3->
    ( N1 is N//3,sanrui(N1,E1),
E is E1+1);E=0).
```

2.5 フィボナッチ数列のn項目の数と，２の指数，３の指数を一気に求めるプログラム

```
beki2([],0):-!.
beki2([X|L],E):-beki2(L,E0),
(   X==2->E is E0+1;E=E0).

beki3([],0):-!.
beki3([X|L],E):-beki3(L,E0),
(   X==3->E is E0+1;E=E0).

fb23(N,[F,E2,E3]):-fb(N,F),nirui(F,E2),
sanrui(F,E3).

sisu(N):- for(2=<100,N),
fb23(N,X),
write(X),nl,
fail.
sisu(N).
```

2.6 分数を約分するプログラム

```
/** kiyaku no suu wo motomeru mono **/
asdf2(1,1/1).
asdf2(N,A/B):-N>1, N1 is N-1, asdf2(N1,A1/B1),
B is (2*N-1)*B1, A is (2*N-1)*A1+B1.

gcd(X,Y,D):-Y=0,D=X.
gcd(X,Y,D):-R is X mod Y,
gcd(Y,R,D).

kiyaku(B/A,D/C):-gcd(A,B,S),
C is A/S,
D is B/S.

asdf3(N,Y/S):-asdf2(N,X),
kiyaku(X,Y/S).
```

2.7　素因数分解した数を全て表示するプログラム

```
/** factor(P/I) I ha P no saisyouinsuu **/
factor(P/2):- Q is P//2,P =:= 2*Q,!.
factor(P/I):- P1 is floor(sqrt(P)),
for(1 =< P1,J),
J1 is 2*J+1,
Q is P//J1,
P =:= J1*Q,I= J1,!.
factor(P/P) :- !.

/** factorize(P,List) List ha P no soinnsuu no List **/
factorize(P,[P]):- factor(P/P1),P==P1,!.
factorize(P,List):- factor(P/I), /* kai List */
P1 is P//I,
List=[I|List1],
factorize(P1,List1),!.
```

3 結果

3.1 プログラミングの入力方法

?- fb23(m,A).

という風に Prolog に入力すれば

A=[a,b,c]

と出力される．これらの各 a,b,c は以下の意味である．
・a はフィボナッチ数列の m 項目の数を表す.
・b は a を素因数分解したときの２の指数を表す.
・c は a を素因数分解したときの３の指数を表す.

```
?- fib_(m,B/A),kiyaku(B/A,C/D),factorize(D,F),beki2(F,E).
```

という風に Prolog に入力すれば

B=b
A=a
C=c
D=d
F=[・,・,・,…・]
E=e

と出力される．これらの各 a,b,c,d,[ ],e は以下の意味である．
・a は，m 項目のフィボナッチ数列の逆数の和の分母を表す.
・b も同じく，m 項目のフィボナッチ数列の逆数の和の分子を表す.
・さらに c は，$\frac{B}{A}$ を約分した後の分子を表す.
・d も同じく，$\frac{B}{A}$ を約分した後の分母を表す.
・F の [ ] の中は d を素因数分解したときの数を表す.
・e は先程述べた F=[ ] の中の２の個数を表す．即ちこれこそが $2^{e(k)}\times$ 奇数 の e である．

ちなみにこの beki2(F,E) の部分を beki3(F,E) に変えれば，２の指数ではなく３の指数を調べられる．

フィボナッチ数列 $\{F_k\}$ を素因数分解したときの２の指数を α_k とする．

さらに $\varepsilon_2(k)$=max[$\varepsilon \mid m = 2^{\varepsilon}\times$ 奇数 $< k$] と定義します.

ではこれらのプログラムを使い，表にまとめてみた.

3.2 $e(k)$ を表す表

・α_k は $\{F_k\}$ を素因数分解したときの 2 の指数
・$\varepsilon_2(k)$=max[$\varepsilon \mid m = 2^{\varepsilon} \times$ 奇数 $< k$]
・$e(k)$ は $a_k = 2^{e(k)} \times$ 奇数 の $e(k)$ である

表 1:

n 項目	フィボナッチ数列 $\{F_k\}$	α_k	$\varepsilon_2(k)$	a_k	$e(k)$
1	1	0	×	1	0
2	1	0	0	1	0
3	2	1	1	2	1
4	3	0	1	6	1
5	5	0	2	30	1
6	8	3	2	120	3
7	13	0	2	1560	3
8	21	0	2	10920	3
9	34	1	3	185640	3
10	55	0	3	·	3
11	89	0	3	·	3
12	144	4	3	·	4
13	233	0	3	·	4
14	377	0	3	·	4
15	610	1	3	·	4
16	987	0	3	·	4
17	1597	0	4	·	4
18	2584	3	4	·	4
19	4181	0	4	·	4
20	6765	0	4	·	4
21	10946	1	4	·	4
22	17771	0	4	·	4
23	28657	0	4	·	4
24	46368	5	4	·	5
25	75025	0	4	·	5
26	121393	0	4	·	5
27	196418	1	4	·	5
28	317811	0	4	·	5

表 2:

29	514229	0	4	·	5
30	832040	3	4	·	5
31	1346269	0	4	·	5
32	2178309	0	4	·	5
33	3524578	1	5	·	5
34	5702887	0	5	·	5
35	9227465	0	5	·	5
36	14930352	4	5	·	5
37	24157817	0	5	·	5
38	39088169	0	5	·	5
39	63245986	1	5	·	5
40	102334155	0	5	·	5
41	165580141	0	5	·	5
42	267914296	3	5	·	5
43	433494437	0	5	·	5
44	701418733	0	5	·	5
45	1134903170	1	5	·	5
46	1836311903	0	5	·	5
47	2971215073	0	5	·	5
48	4807526976	6	5	·	6
49	7778742049	0	5	·	6
50	12586269025	0	5	·	6
51	20365011074	1	5	·	6
52	32951280099	0	5	·	6
53	53316291173	0	5	·	6
54	86267571272	3	5	·	6
55	·	0	5	·	6
56	·	0	5	·	6
57	·	1	5	·	6
58	·	0	5	·	6
59	·	0	5	·	6
60	·	4	5	·	6
61	·	0	5	·	6
62	·	0	5	·	6
63	·	1	5	·	6
64	·	0	5	·	6
65	·	0	6	·	6
66	·	3	6	·	6

表 3:

67	·	0	6	·	6
68	·	0	6	·	6
69	·	1	6	·	6
70	·	0	6	·	6
71	·	0	6	·	6
72	·	5	6	·	6
73	·	0	6	·	6
74	·	0	6	·	6
75	·	1	6	·	6
76	·	0	6	·	6
77	·	0	6	·	6
78	·	3	6	·	6
79	·	0	6	·	6
80	·	0	6	·	6
81	·	1	6	·	6
82	·	0	6	·	6
83	·	0	6	·	6
84	·	4	6	·	6
85	·	0	6	·	6
86	·	0	6	·	6
87	·	1	6	·	6
88	·	0	6	·	6
89	·	0	6	·	6
90	·	3	6	·	6
91	·	0	6	·	6
92	·	0	6	·	6
93	·	1	6	·	6
94	·	0	6	·	6
95	·	0	6	·	6
96	·	7	6	·	7
97	·	0	6	·	7
98	·	0	6	·	7
99	·	1	6	·	7
100	·	0	6	·	7
101	·	0	6	·	7
102	·	3	6	·	7
103	·	0	6	·	7
104	·	0	6	·	7

表 4:

105	·	1	6	·	7
106	·	0	6	·	7
107	·	0	6	·	7
108	·	4	6	·	7
109	·	0	6	·	7
110	·	0	6	·	7
111	·	1	6	·	7
112	·	0	6	·	7
113	·	0	6	·	7
114	·	3	6	·	7
115	·	0	6	·	7
116	·	0	6	·	7
117	·	1	6	·	7
118	·	0	6	·	7
119	·	0	6	·	7
120	·	5	6	·	7
121	·	0	6	·	7
122	·	0	6	·	7
123	·	1	6	·	7
124	·	0	6	·	7
125	·	0	6	·	7
126	·	3	6	·	7
127	·	0	6	·	7
128	·	0	6	·	7
129	·	1	7	·	7
130	·	0	7	·	7
131	·	0	7	·	7
132	·	4	7	·	7
133	·	0	7	·	7
134	·	0	7	·	7
135	·	1	7	·	7
136	·	0	7	·	7
137	·	0	7	·	7
138	·	3	7	·	7
139	·	0	7	·	7
140	·	0	7	·	7
141	·	1	7	·	7
142	·	0	7	·	7

表 5:

143	·	0	7	·	7
144	·	6	7	·	7
145	·	0	7	·	7
146	·	0	7	·	7
147	·	1	7	·	7
148	·	0	7	·	7
149	·	0	7	·	7
150	·	3	7	·	7
151	·	0	7	·	7
152	·	0	7	·	7
153	·	1	7	·	7
154	·	0	7	·	7
155	·	0	7	·	7
156	·	4	7	·	7
157	·	0	7	·	7
158	·	0	7	·	7
159	·	1	7	·	7
160	·	0	7	·	7
161	·	0	7	·	7
162	·	3	7	·	7
163	·	0	7	·	7
164	·	0	7	·	7
165	·	1	7	·	7
166	·	0	7	·	7
167	·	0	7	·	7
168	·	5	7	·	7
169	·	0	7	·	7
170	·	0	7	·	7
171	·	1	7	·	7
172	·	0	7	·	7
173	·	0	7	·	7
174	·	3	7	·	7
175	·	0	7	·	7
176	·	0	7	·	7
177	·	1	7	·	7
178	·	0	7	·	7
179	·	0	7	·	7
180	·	4	7	·	7

表 6:

181	·	0	7	·	7
182	·	0	7	·	7
183	·	1	7	·	7
184	·	0	7	·	7
185	·	0	7	·	7
186	·	3	7	·	7
187	·	0	7	·	7
188	·	0	7	·	7
189	·	1	7	·	7
190	·	0	7	·	7
191	·	0	7	·	7
192	·	8	7	·	8
193	·	0	7	·	8
194	·	0	7	·	8
195	·	1	7	·	8
196	·	0	7	·	8
197	·	0	7	·	8
198	·	3	7	·	8
199	·	0	7	·	8
200	·	0	7	·	8

4　考察

4.1　α_k の法則

この表を見て気づいたことがある.

・α_k の k が３の倍数の時、α_k はいずれかの自然数になる.
・α_k の k が３の倍数以外の時はすべて０である.

どうしてこういったパターンになるのか？
これはフィボナッチ数列の性質であるからである．なぜならフィボナッチ数列は初項が１で奇数、第２項も１で奇数、第３項が奇数＋奇数で偶数、第４項が奇数＋偶数で奇数、第５項が偶数＋奇数で奇数、第６項が奇数＋奇数で偶数 $\cdots$ といったように

奇数・奇数・偶数 $\cdots$

と並んでいる.
フィボナッチ数列が奇数の時に素因数分解をしても、２の指数は０なので
$\alpha_k =$ ０・０・自然数・０・０・自然数　 というパターンになります.

4.2　$e(k)$ の法則

　表を見て他にも気づいたことがある.

$e(k)$ が初めて３，４，５，６ … と数が増える時が何項目なのか注目していきます.

・$e(k)$ が３に初めてなる時は k が６の時である.
・$e(k)$ が４に初めてなる時は k が１２の時である.
・$e(k)$ が５に初めてなる時は k が２４の時である.
・$e(k)$ が６に初めてなる時は k が４８の時である.
・$e(k)$ が７に初めてなる時は k が９６の時である.
・$e(k)$ が８に初めてなる時は k が１９２の時である.

・
・

これらのことより、$e(k)$ が３以上の数に初めて増える時は k が

$k = 3 \times 2^m$, $e(k) = m + 2$(m は自然数)

　であると予想がつきます.

　$k = 3 \times 2^m$ は

$[\log_2(\frac{k}{3})] = m$ と変形できて

両辺を＋２したら

$[\log_2(\frac{k}{3})]+2 = m+2 = e(k)$

$k \geq 6$ であるので

$e(k) = 2+[\log_2(\frac{k}{3})]$ となります

これは次のページにて証明していきます.

4.2.1 証明

$k=3\times 2^m$,$e(k)=m+2$(m は自然数) であることを帰納法で証明します.

① $m=n$ の時
$k=3\times 2^n$、$e(k)=n+2$ (n は自然数) が成り立つと仮定する.

② m=1 の時
$k=3\times 2^1=6$、$e(k)$=1+2=3、e(6)=3 で成り立つ.

③ $m=n+1$ の時
$k=3\times 2^{n+1}$、$e(k)=(n+1)+2=n+3$
$k=3\times 2\times 2^n$、即ち $k=6\times 2^n$、$e(k)=n+3$
これより

$e(6\times 2^n)=n+3$

これにて示した.

5　感想

この研究を始めて、初めの頃は全く分からなくて右往左往してましたが、研究していくうちに、段々と特徴が分かるようになってきて、研究するのが楽しくなってました。このフィボナッチ数列の逆数の和の表には、まだ気付いた特徴がありましたが、どう説明すればいいのか分かんなかったので、省略しました。

また、この 1 年間ゼミに参加させていただきありがとうございました。研究が遅れがちな私に、色々とご指導いただきありがとうございました。ゼミ中の笑いの絶えないこの部屋、夏休み前に行ったお台場、忘年会などの飲み会、お寿司やピザの出前 … などと数え切れない楽しさに溢れました！このゼミの夏休みに入る前までやってた Prolog は正直言って完璧にはマスターできてません！すみません … でも夏休みが終わって今までやってきた TeX は結構できるようになったと思います！TeXって便利ですよね♪数字や記号の細かい設定ができるので自分の思い通りのレイアウトができるのが最高です。

それでは短い期間でしたがご一緒してくださった皆様、そして分からないところを色々と教えてくださった飯高先生をはじめとする院生の方々、今までありがとうございました。いつまでもお元気で！