# mを法とした一般フィボナッチ数列の研究

学習院大学数学科４年
小松 謙祐

Contents

## 1. 目的

一般フィボナッチ数列に関して$m$を法とした数列の周期および類方程式について研究する。

## 2. 用語

- 一般項が漸化式 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ を満たす数列は一般フィボナッチ数列 $\{f_n\}$ と呼ぶ。

- $m$ を法とした一般フィボナッチ数列を $\{a_n\}$、 $a_n$ と $a_{n+1}$ の対 $(a_n, a_{n+1})$ を $b_n$ として対の列 $\{b_n\}$ を定義する。

- 上記の対の列 $\{b_n\}$ は必ず $b_1 \equiv b_r \bmod m$ を満たす $r$ が存在する。この時最小の $r-1$ を周期、$[b_1, \cdots, b_{r-1}]$ を軌道と呼ぶ。

- 集合
  $T = \{[0,0], \cdots, [0,p-1], \cdots, [p-1,0], \cdots, [p-1,p-1]\}$
  を $m$ を法とした時の全空間 $T$ と呼ぶ。

## 3. 方針

- ここでは特に$m$が素数$p$の時について研究をする。
- 一般フィボナッチ数列の第$n$項と第$n+1$項の対を第$n$項とした対の列の初項を$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$とすると第２項は$\begin{pmatrix} b \\ a+b \end{pmatrix}$となる。$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$とおくと$\begin{pmatrix} b \\ a+b \end{pmatrix}$=$S \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$と表せる。
- 全空間$T$を求める。
- 全空間$T$を分割して軌道空間を作る。
- それぞれの$p$について類方程式、軌道の数、最大周期を求める。

- $S$の固有多項式は$(x^2-x-1)$なので、$x^2-x-1 \equiv 0 \bmod p$が整数解をもたないものをtype A、二つの異なる整数解をもつものを type B、一つの重解を持つものを type C と分類する。

- $b_x$について、$b_x + b_y \equiv (0,0) \bmod p$となるような$b_y$を求め、表にして観察してみる。

- $p$を法とした場合の類方程式と$2p$、$p^2$を法とした場合のの類方程式の関係を考察する。

# 4. 考察と推測

## 4.1. **考察.**

命題

$m$を法とした一般フィボナッチ数列は必ず初項に回帰する

証明

一般フィボナッチ数列の第$n$項と第$n+1$項の対を第$n$項とした対の列の初項を$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$とすると第2項は$\begin{pmatrix} b \\ a+b \end{pmatrix}$となる。$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$とおくと

$S \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ a+b \end{pmatrix}$より第$n$項は$S^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$と表せる。

$m$を法とした場合$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$は全部で$m^2$個なので

$S^j \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \equiv S^k \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \bmod m$を満たす$k > j$が必ず存在する。ここで両辺に$S^{-j}$を左から掛け、$j - k = l$と置くと

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \equiv S^l \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \bmod m$となる。よって$m$を法とした一般フィボナッチ数列は必ず初項に回帰する。

### 4.2. **推測.**

最大周期とtypeの関係

法$p$が

(1) type Aの時の最大周期は$p^2-1$の約数である。

(2) type Bの時の最大周期は$p-1$の約数である。

(3) type Cの時の最大周期はどちらの約数でもない。

例

Table 1. 20以下の法$p$の時の最大周期と$p^2-1, p-1$の関係

| $p$ | $p^2-1$ | $p-1$ | 最大周期 | type |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 1 | 3 | A |
| 3 | 8 | 2 | 8 | A |
| 5 | 24 | 4 | 20 | C |
| 7 | 48 | 6 | 16 | A |
| 11 | 120 | 10 | 10 | B |
| 13 | 168 | 12 | 28 | A |
| 17 | 288 | 16 | 36 | A |
| 19 | 360 | 18 | 18 | B |

$b_x$の補対$b_y$

$b_x$について全空間$T$の中から、$b_x + b_y \equiv (0,0) \bmod p$となるような$b_y$を求めると$p \neq 2$の時type Aとtype Cの場合では同じ軌道内に$b_y$が必ず存在する。
しかし、type Bの場合では別の軌道に$b_y$が存在するものが１つはある。

例 ($p$=11の時) [0, 1]と[0, 10]$\cdots$別の軌道に存在する
[1, 8]と[10, 3]$\cdots$同じ軌道内に存在する
($p$=19の時) [0, 1]と[0, 18]$\cdots$別の軌道に存在する
[1, 15]と[18, 4]$\cdots$同じ軌道内に存在する
($p$=29の時) [0, 1]と[0, 28]$\cdots$別の軌道に存在する
[1, 6]と[28, 23]$\cdots$同じ軌道内に存在する
($p = 31$の時) [0, 1]と[0, 30]$\cdots$別の軌道に存在する
[1, 13]と[30, 18]$\cdots$同じ軌道内に存在する

**法$p$と法$p^2$の時の一般フィボナッチ数列の最大周期**

法$p^2$の時の一般フィボナッチ数列の最大周期は法$p$の時の一般フィボナッチ数列の最大周期を$p$倍したものとなる。

例

TABLE 2. 法 $p$ と法 $p^2$ の時の一般フィボナッチ数列の最大周期

| $p$ | | 最大周期 |
|---|---|---|
| $p=2$ | $p$ | 3 |
| | $p^2$ | 6 |
| $p=3$ | $p$ | 8 |
| | $p^2$ | 24 |
| $p=5$ | $p$ | 20 |
| | $p^2$ | 100 |
| $p=7$ | $p$ | 16 |
| | $p^2$ | 112 |
| | | |

| | | |
|---|---|---|
| $p=11$ | $p$ | 10 |
| | $p^2$ | 110 |
| $p=13$ | $p$ | 28 |
| | $p^2$ | 364 |
| $p=17$ | $p$ | 36 |
| | $p^2$ | 612 |
| $p=19$ | $p$ | 18 |
| | $p^2$ | 342 |
| $p=23$ | $p$ | 48 |
| | $p^2$ | 1104 |

Table 3. 法 $p$ の時と法 $2p$ の時の類方程式の関係

| | | | |
|---|---|---|---|
| $p=3$ | $p$ | $3^2$=B·A+1·1 | B=8,A=1 |
| | $2p$ | $6^2$=3B·A+B·A+3·1+1·1 | |
| $p=5$ | $p$ | $5^2$=D·C+B·A+1·1 | D=20,C=1,B=4,A=1 |
| | $2p$ | $10^2$=3D·C+D·C+3B·A+B·A+3·1+1·1 | |
| $p=7$ | $p$ | $7^2$=B·A+1·1 | B=16,A=3 |
| | $2p$ | $14^2$=3B·A+B·A+3·1+1·1 | |
| $p=11$ | $p$ | $11^2$=D·C+B·A+1·1 | D=10,C=11,B=5,A=2 |
| | $2p$ | $22^2$=3D·C+D·C+3B·A+B·A+3·1+1·1 | |
| $p=13$ | $p$ | $13^2$=B·A+1·1 | B=28,A=6 |
| | $2p$ | $26^2$=3B·A+B·A+3·1+1·1 | |
| $p=17$ | $p$ | $17^2$=B·A+1·1 | B=36,A=8 |
| | $2p$ | $34^2$=B·4A+3·1+1·1 | |