

$\frac{1}{9p}$ の循環節の数論的研究

the study of circulating decimal

学習院大学 理学部 数学科

栗木真奈美

Manami Kuriki

平成 22 年 2 月 1 日

目次

1	目的	2
2	方法	2
3	結果	5
4	考察	7
5	一般的な理論と証明	8
	5.1 記号の定義と準備	8
	5.2 一般的な理論	8
	5.3 証明	9
6	今後の課題	12
7	感想	13

1 目的

まずはじめに、次のような例について考える。

$$\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$$

循環節 142857 を得る。この循環節を半分に分けて足すと

$$142 + 857 = 999$$

循環節を 3 つに分けて足すと

$$14 + 28 + 57 = 99$$

一般に、奇素数 p について $\frac{1}{p}$ の循環節の長さが偶数の時、循環節を半分に分けて加えると 9 が並ぶことはよく知られている。¹

また、 $\frac{1}{N}$ ($N \geq 7$, 奇素数) を小数に 10 進展開した時の循環節の長さが 3 の倍数なら、その循環節を 3 つに分けて加えると 9 が並ぶことは知られている。²

この研究においては、2000 以下の自然数 N を分母とし、 $\frac{1}{N}$ を小数に 10 進展開した時の循環節をリストで $[q_1, q_2, \dots, q_M]$ と表示する。

循環節の長さが 3 の倍数すなわち $M = 3m$ ならば、循環節のリストを

$$[q_1, q_2, \dots, q_m], [q_{m+1}, q_{m+2}, \dots, q_{2m}], [q_{2m+1}, q_{2m+2}, \dots, q_{3m}]$$

のように 3 分割する。

これらについて桁上がりも考えて対応する成分を加えてできた数（これを 3 分割和という）について、どのような性質が成り立つのか考える。

特に $N = 9p$ ($p \geq 7$, 奇素数) を分母とするものについて研究する。

2 方法

■ プログラム～SWI-Prolog ■

```
/** for **/  
for(I=<J,I):-I=<J.  
for(I=<J,K):-I=<J,  
    T1 is I+1 for(T1=<I K)
```

最大公約数

商と余り

参照
飯高ゼミ所属学生によって証明されている。

```

/** 1/B の G 進数小数展開における商 (循環節) のリスト表示と長さ **/
jl(B,G,List,SS):-1<B,jl_aux([1/B,G],1,0,[],List),length(List,SS),!.
jl_aux([1/B,G],1,R,L,L):-R>0,!.
jl_aux(Const,A,R,L,W):-
    Const = [1/B,G],
    A1 is A * G,
    res_q(A1 = B*Q + R1),
    append0(L1=L+[Q]),
    jl_aux(Const,R1,R1,L1,W).

/** リストの結合 **/
append0(Z=[]+Z).
append0([A|Z] = [A|X]+Y):-append0(Z= X+Y).

/** リストの 3 分割 **/
left(A=[]+A,0):-!.
left(A=B+C,N):-N>0,N1 is N-1,!,
left(A=B1+[X|C],N1),append0(B=B1+[X]),!.
santoubun(L=A+B+C):-length(L,N),N1 is N/3,left(L=A+D,N1),left(D=B+C,N1).

/** G 進数を 10 進数で表す **/
g_dig(N,[N],G):-N<G.
g_dig(X,L,G):-append0(L = N + [R]),
    g_dig(Y,N,G),
    X is Y * G + R.

/** 10 進数を G 進数で表しリストで表記する **/
dig_g(N,[N],G):-N<G.

```

分割和

```
/** 1/B の G 進数小数展開における循環節の長さが 3 の倍数のときの 3 分割和 **/
```

```
san(B,G,R):-jl(B,G,L,SS),  
    gcd(D2=(3,SS)),  
    (D2==3 -> santoubun(L=X+Y+Z),  
    gdig(Q=X+Y,G),gdig(R=Q+Z,G)).
```

```
/** 素因数分解 **/
```

```
factor(P/2):-Q is P//2,P:=2*Q,!.  
factor(P/I):-P1 is floor(sqrt(P)),  
    for(1=<P1,J),  
    J1 is 2*J+1,  
    Q is P//J1,  
    P:=J1*Q,I=J1,!.  
factor(P/P):-!.
```

```
/** 素因数分解の結果をリストで表記する **/
```

```
factorize(P,[P]):-factor(P/Q),Q==P,!.  
factorize(P,List):-factor(P/I),  
    P1 is P//I,  
    List=[I|List1],  
    factorize(P1,List1),!.
```

```
/** 表を作成する **/
```

```
hyou3(K,C,G):-for(K=<C,B),  
    gcd(D2=(B,G)),D2==1,  
    san(B,G,F),  
    fail.  
hyou3(K,C,G).
```

3 結果

2000 以下の自然数 N を分母とした $\frac{1}{N}$ の中で $N = 9p$ ($p \geq 7$, 奇素数) を分母とするものを表 1 にまとめる。

表 1: $\frac{1}{N}$ において $N = 9p$ ($p \geq 7$, 奇素数) のとき

9p	素因数分解	3 分割和	長さ	9p	素因数分解	3 分割和	長さ
63	[3, 3, 7]	[1, 3, 2]	6	909	[3, 3, 101]		
99	[3, 3, 11]			927	[3, 3, 103]		
117	[3, 3, 13]	[1, 3, 2]	6	963	[3, 3, 107]		
153	[3, 3, 17]			981	[3, 3, 109]	[3, 3, ..., 3, 3]	108
171	[3, 3, 19]	[1, 3, 3, 3, 3, 3, 2]	18	1017	[3, 3, 113]		
207	[3, 3, 23]			1143	[3, 3, 127]	[3, 3, ..., 3, 3]	42
261	[3, 3, 29]			1179	[3, 3, 131]		
279	[3, 3, 31]	[1, 3, 3, 3, 3, 3, 2]	15	1233	[3, 3, 137]		
333	[3, 3, 37]	[3]	3	1251	[3, 3, 139]		
369	[3, 3, 41]			1341	[3, 3, 149]		
387	[3, 3, 43]	[1, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2]	21	1359	[3, 3, 151]	[3, 3, ..., 3, 3]	75
423	[3, 3, 47]			1413	[3, 3, 157]	[1, 3, ..., 3, 2]	78
477	[3, 3, 53]			1467	[3, 3, 163]	[1, 3, ..., 3, 2]	81
531	[3, 3, 59]			1503	[3, 3, 167]		
549	[3, 3, 61]	[1, 3, ..., 3, 2]	60	1557	[3, 3, 173]		
603	[3, 3, 67]	[3, ..., 3]	33	1611	[3, 3, 179]		
639	[3, 3, 71]			1629	[3, 3, 181]	[1, 3, ..., 3, 2]	180
657	[3, 3, 73]			1719	[3, 3, 191]		
711	[3, 3, 79]			1737	[3, 3, 193]	[1, 3, ..., 3, 2]	192
747	[3, 3, 83]			1773	[3, 3, 197]		
801	[3, 3, 89]			1791	[3, 3, 199]	[1, 3, ..., 3, 2]	99
873	[3, 3, 97]	[1, 3, ..., 3, 2]	96	1899	[3, 3, 211]	[1, 3, ..., 3, 2]	30

表 1 の結果をもとに、3 分割和のリストに注目し以下性質ごとに表 2 ～ 4 にまとめる。

表 2: 3 分割和が 1 で始まり 3 が並び 2 で終わる

9p	p	3 分割和	長さ
63	7	[1, 3, 2]	6
117	13	[1, 3, 2]	6
171	19	[1, 3, 3, 3, 3, 3, 2]	18
279	31	[1, 3, 3, 3, 3, 2]	15
387	43	[1, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2]	21
549	61	[1, 3, 3, ..., 3, 3, 2]	60
873	97	[1, 3, 3, ..., 3, 3, 2]	96
1413	157	[1, 3, 3, ..., 3, 3, 2]	78
1467	163	[1, 3, 3, ..., 3, 3, 2]	81
1629	181	[1, 3, 3, ..., 3, 3, 2]	180
1737	193	[1, 3, 3, ..., 3, 3, 2]	192
1791	199	[1, 3, 3, ..., 3, 3, 2]	99
1899	211	[1, 3, 3, ..., 3, 3, 2]	30

表 3: 3 分割和に 3 が並ぶ

9D	D	3 分割和	長さ

5 一般的な理論と証明

5.1 記号の定義と準備

周期

$\frac{1}{b}$ を小数に g 進展開したとき、循環節の周期 u を λ を使って $u = \lambda(b)$ と表す。

位数

g と b が互に素なら $u = \lambda(b)$ は $\text{mod } b$ での g の位数。つまり $g^u \equiv 1 \pmod{b}$ を満たす最小の正の数が u である。

定理 3 (ベルヌーイの定理)³

g と b が互に素で b と c も互に素なら $\lambda(bc) = \text{lcm}(\lambda(b), \lambda(c))$

5.2 一般的な理論

既約の真分数 $\frac{a}{b}$ を小数に 10 進展開することを考える。ただし、10 と b は互いに素で a と b も互に素とする。 $a < b$ なので $10 \times a$ を考えこれを b でわると

$$10a = q_1b + r_1$$

更に $10r_1$ を b でわると

$$10r_1 = q_2b + r_2$$

これを繰り返す。

$$10r_2 = q_3b + r_3$$

⋮

$$10r_j = q_{j+1}b + r_{j+1} (j = 1, 2, 3, \dots)$$

b を法として考えると、

$$10a \equiv r_1 \pmod{b}$$

$$10r_1 \equiv r_2 \pmod{b}$$

⋮

$$10r_{j-1} \equiv r_j \pmod{b} (j = 1, 2, 3, \dots)$$

上記より

が b を法としたとき公比 10 の等比数列となることがいえる。

以上の論法を 奇素数 と b の場合に適用する。

参照

5.3 証明

～三分割和の公式を導く～

位数の定義により

$$10^u \equiv 1 \pmod{9p}$$

$10^1 \equiv 1 \pmod{9}$ なので

$$u = \lambda(9) = 1$$

9 と p は互に素なのでベルヌーイの定理より

$$\lambda(9p) = \text{lcm}(\lambda(9), \lambda(p)) = \text{lcm}(1, \lambda(p)) = \lambda(p) = u$$

ここで周期 u が 3 の倍数のとき $u = 3m$ とすると、

$$10^u = 10^{3m} \equiv 1 \pmod{9p}$$

法の条件を 9 と p にわけると

$$\begin{cases} 10^{3m} \equiv 1 \pmod{9} \\ 10^{3m} \equiv 1 \pmod{p} \end{cases}$$

が成り立つ。

位数が $3m$ なので $10^m \not\equiv 1 \pmod{9p}$ である。

$10^m \equiv 1 \pmod{9}$ は成立するので $10^m \not\equiv 1 \pmod{p}$ となる。

$$10^{3m} - 1 = (10^m - 1)(10^{2m} + 10^m + 1) \equiv 0 \pmod{p}$$

$10^m - 1 \not\equiv 0$ より

$$10^{2m} + 10^m + 1 \equiv 0 \pmod{p} \tag{*1}$$

10 と p は互に素なので (*1) と $a = 1$ より

$$r_0 \equiv 10^0 a = 1$$

$$r_m \equiv 10^m a = 10^m$$

$$r_{2m} \equiv 10^{2m} a = 10^{2m}$$

この 3 つを加えると、

$$r_0 + r_m + r_{2m} \equiv 1 + 10^m + 10^{2m} \equiv 0 \pmod{p}$$

更に、

これを繰り返す。

$$r_j + r_{j+m} + r_{j+2m} = k_j p \text{ と正整数 } k_j \text{ で表せる。} \quad (*2)$$

また $b = 9p$ だったので、

$$10r_j = bq_{j+1} + r_{j+1} = 9pq_{j+1} + r_{j+1}$$

$$10r_{j+m} = 9pq_{j+m+1} + r_{j+m+1}$$

$$10r_{j+2m} = 9pq_{j+2m+1} + r_{j+2m+1}$$

この 3 式の左右の辺同士を加えると、

$$10(r_j + r_{j+m} + r_{j+2m}) = 9p(q_{j+1} + q_{j+m+1} + q_{j+2m+1}) + r_{j+1} + r_{j+m+1} + r_{j+2m+1}$$

(*2) より

$$10k_j p = 9p(q_{j+1} + q_{j+m+1} + q_{j+2m+1}) + pk_{j+1}$$

$$10k_j = 9(q_{j+1} + q_{j+m+1} + q_{j+2m+1}) + k_{j+1}$$

ここで $q_j + q_{j+m} + q_{j+2m} = Q_j$ とおく。

$$10k_j = 9Q_{j+1} + k_{j+1}$$

$$10k_j - k_{j+1} = 9Q_{j+1}$$

これらを $j = 0, 1, 2, \dots$ について考えると

$$10k_0 - k_1 = 9Q_1 \quad (*3)$$

$$10k_1 - k_2 = 9Q_2$$

⋮

$$10k_{m-1} - k_m = 9Q_{m+1}$$

(*3) (最初の式) の両辺に 10^{m-1} 、次の式の両辺に 10^{m-2} をかけていく。

$$10^m k_0 - 10^{m-1} k_1 = 9 \cdot 10^{m-1} Q_1$$

$$10^{m-1} k_1 - 10^{m-2} k_2 = 9 \cdot 10^{m-2} Q_2$$

⋮

$$10k_{m-1} - k_0 = 9Q_m$$

これらの左右の辺同士を加えると、

は、数字 を並べて を超えたら繰り上
 がりを考えた数になっている。これを とかく。
 は循環節の 分割和 になっている。



$k_0 p = r_j + r_{j+m} + r_{j+2m}$ であつたので

$$k_0 = \frac{r_0 + r_m + r_{2m}}{p} = \frac{1 + r_m + r_{2m}}{p}$$

これを用いると

$$Z = \frac{(1 \cdots \cdots 1)_{10} \cdot (1 + r_m + r_{2m})}{p}$$

$\frac{1}{9p}$ の 3 分割和の公式

$$Z = \frac{(1 \cdots \cdots 1)_{10} \cdot (1 + r_m + r_{2m})}{p}$$

～定理 1 の証明～

$1 + r_m + r_{2m} = 3pl_0$ とおき l_0 の決定を行う。

$r_0 + r_m + r_{2m} = k_0 p$ 、及び余りの性質から $r_0 = a = 1$ 、 $r_m \leq 9p - 1$ 、 $r_{2m} \leq 9p - 1$ であるから

$$k_0 p = 1 + r_m + r_{2m} \leq 18p - 1$$

$$k_0 \leq 18 - \frac{1}{p}$$

$$k_0 \leq 17$$

また、

$$3pl_0 \leq 18p - 1$$

$$3l_0 \leq 18 - \frac{1}{p}$$

$$3l_0 \leq 17$$

$$l_0 \leq 5$$

一方、 $r_i \equiv 10^j a \pmod{b}$ より

なので

ならば

ここで u は $p-1$ の約数 なので

$$p-1 = us$$

$u = 3m$ なので代入して、

$$p = 1 + 3ms$$

$ms = t$ とおけば

$$p = 1 + 3t$$

p は奇素数であることから t は奇数ではないといえるので $t = 2n$ とかける。

$$p = 1 + 6n$$

つまり、 $u = 3m$ (u が 3 の倍数) のときは $p \equiv 1 \pmod{6}$ 。

よって、

$$p \equiv 2 + 3k = 1 + 6n$$

$$1 = 6n - 3k = 3(2n - 1)$$

これは矛盾。 $l_0 \neq 2, l_0 \neq 5$ であることがわかった。

$l_0 \leq 5$ ゆえに $l_0 = 1$ と $l_0 = 4$ である。

$$\begin{cases} l_0 = 1 \text{ のとき} & 3 \text{ 分割和は } [3, 3, \dots, 3, 3] \\ l_0 = 4 \text{ のとき} & 3 \text{ 分割和は } [1, 3, \dots, 3, 2] \end{cases}$$

定理 1 は証明できた。

～定理 2 の証明～

ベルヌーイの定理より $m = 9p$ の位数は

$$\lambda(9p) = \text{lcm}(\lambda(9), \lambda(p)) = \text{lcm}(1, \lambda(p)) = \lambda(p) = u$$

$u = \lambda(p)$ (p の位数) は 3 の倍数でなければならない。

u は $p-1$ の約数であり $p \equiv 5 \pmod{6}$ より $p = 6k + 5$ とかける。

u は $p-1 = 6k+4$ の約数で 3 で割ることはできない。

したがって循環節は 3 分割できない。

定理 2 は証明できた。

今後の課題

今後の課題としては、以下のことが挙げられる。

定理 1 については証明できたが、表 表 に表れた についてどのようなときに になり、 になるのか。明確にする証明方法が未解決である。

また、今回は $-$ をとりあげたが、 $-$ や $-$ の 分割和はどのようなようになるのか気になる。

($-$ の 分割和については、武居佳奈子さんが研究をした。)

7 感想

Pro-log でプログラミングを学び、TEX を用いて論文を書き、初めてのことでだけでしたが、飯高先生が本当に丁寧にはじめから教えてくださったおかげで、しっかりと理解してここまでたどりつくことができました。また、愉快的仲間たちと助け合えてよかったです。

希望を持って進むことが大事！希望に満ちていればいつか光は見える！簡単なようにみえるところに実は落とし穴！など、数学は生きていくうえで大切なことをいっぱい教えてくれる素敵な学問だと思います。

飯高先生のゼミで学べて幸せです、とても楽しかったです。

参考文献

- [1] 飯高茂, 岩波ジュニア新書, パソコンで開く 数の不思議世界, 2004
- [2] LEONARD EUGENE DICKSON, CHELSEA, THEORY OF NUMBERS VOL. I, 1992
- [3] 大野一樹 小島英人 高梨拓郎, 飯高ゼミ, 循環小数の分割和の研究, 2004