$\frac{1}{9p}$の循環節の3分割和について

学習院大学 理学部 数学科
0643020
栗木真奈美

□■□目的□■□

はじめに、次のような例について考える。

$$\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$$

循環節 142857 を得る。

この循環節を3つに分けて足すと、

$$14 + 28 + 57 = \mathbf{99}$$

3分割和

$\frac{1}{N}$を小数に展開した時、循環節の長さが3の倍数ならば循環節を3分割し、それらについて桁上がりも考えて対応する成分を加えてできた数

$\frac{1}{N}(N \geq 7,$奇素数$)$を小数に10進展開した時、3分割和は**9**が並ぶことは知られている。

この研究では、
$\frac{1}{9p}(p \geq 7,$奇素数$)$を小数に10進展開した時、3分割和はどのような性質が成り立つのか考える。

例 1 $\frac{1}{63}$ の3分割和

$$63 = 9 \times 7 \qquad (p = 7 \text{ のとき})$$

$$\frac{1}{63} = 0.\dot{0}1587\dot{3}$$

この循環節を3つに分けて足すと、

$$01 + 58 + 73 = \boxed{132}$$

例 2 $\frac{1}{603}$ の3分割和

$$603 = 9 \times 67 \qquad (p = 67 \text{ のとき})$$

$$\frac{1}{603} = 0.\dot{0}016583747927031509121061359867\dot{3}3$$

この循環節を3つに分けて足すと、

$$\begin{array}{r} 00165837479 \\ 27031509121 \\ +\ 06135986733 \\ \hline 33333333333 \end{array}$$

□■□結果□■□

$\frac{1}{9p}(p \geq 7,$ 奇素数$)$ の10進展開の3分割和では、次のタイプがあらわれた。(表参照)

①[1,3,$\cdots\cdots$,3,2] (表2)

②[3,3,$\cdots\cdots$,3,3] (表3)

□■□考察□■□

結果より、pの値に着目すると、以下の推測ができる。
$\frac{1}{9p}(p \geq 7,$奇素数$)$を小数に10進展開したとき、

- ケース１

  $p \equiv 1 \bmod 6$ が成立し、循環節の長さが3の倍数ならば
  3分割和は　[1,3,$\cdots\cdots$,3,2]　または　[3,3,$\cdots\cdots$,3,3]

  ※$p \equiv 1 \bmod 6$ で循環節の長さが３の倍数ではないこともある。

- ケース２

  $p \equiv 5 \bmod 6$ のとき、
  循環節の長さは3の倍数ではない。

この２つの場合にわけることができる。

□■□定理□■□

定理 1.

$p \equiv 1 \bmod 6$ のとき

循環節が3の倍数ならば3分割和は

$[1, 3, \cdots\cdots, 3, 2]$ または $[3, 3, \cdots\cdots, 3, 3]$

定理 2.

$p \equiv 5 \bmod 6$ のとき

3分割和にできない。

□■□定理を証明するための準備□■□

～3分割和を導く～

位数の定義により

$$10^u \equiv 1 \bmod 9p$$

$10^1 \equiv 1 \bmod 9$ なので

$$u = \lambda(9) = 1$$

9 と p は互に素なのでベルヌーイの定理より

$$\lambda(9p) = lcm(\lambda(9), \lambda(p)) = lcm(1, \lambda(p)) = \lambda(p) = u$$

ここで、周期 u が3の倍数のとき $u = 3m$ とすると、

$$10^u = 10^{3m} \equiv 1 \bmod 9p$$

法の条件を9とpにわけると

$$\begin{cases} 10^{3m} \equiv 1 \bmod 9 \\ 10^{3m} \equiv 1 \bmod p \end{cases}$$

いま、位数が$3m$なので$10^m \not\equiv 1 \bmod 9p$である。

$$\begin{cases} 10^{m} \equiv 1 \bmod 9 \\ 10^{m} \not\equiv 1 \bmod p \end{cases}$$

$$10^{3m} - 1 = (10^m - 1)(10^{2m} + 10^m + 1) \equiv 0 \bmod p$$

$$10^{2m} + 10^m + 1 \equiv 0 \bmod p$$

$r_j \equiv 10^j \bmod p$より

$$r_0 + r_m + r_{2m} \equiv 1 + 10^m + 10^{2m} \equiv 0 \bmod p$$

$$r_1 + r_{m+1} + r_{2m+1} \equiv 10(1 + 10^m + 10^{2m}) \equiv 0 \bmod p$$

これを繰り返すと

$r_j + r_{j+m} + r_{j+2m} = k_j p$ と正整数 k_j で表せる。

また、 $b = 9p$ だったので

$$
\begin{aligned}
10r_j &= bq_{j+1} + r_{j+1} = 9pq_{j+1} + r_{j+1} \\
10r_{j+m} &= 9pq_{j+m+1} + r_{j+m+1} \\
10r_{j+2m} &= 9pq_{j+2m+1} + r_{j+2m+1}
\end{aligned}
$$

この3式の左右の辺同士を加え、$r_j + r_{j+m} + r_{j+2m} = k_j p$を用い、更に$q_j + q_{j+m} + q_{j+2m} = Q_j$とおけば

$$10k_j p = 9pQ_{j+1} + k_{j+1} p$$

$$10k_j - k_{j+1} = 9Q_{j+1}$$

これらを$j=0,1,2,\cdots$について考える。

$$10k_0-k_1=9Q_1$$
$$\vdots$$
$$10k_{m-1}-k_m=9Q_{m+1}$$

最初の式の両辺に10^{m-1}、次式の両辺に10^{m-2}をかけていく。

$$10^m k_0-10^{m-1}k_1=9\cdot10^{m-1}Q_1$$
$$\vdots$$
$$10k_{m-1}-k_0=9Q_m$$

これらの左右の辺同士を加えると、

$$(10^m-1)k_0=9(10^{m-1}Q_1+10^{m-2}Q_2+\cdots\cdots+Q_m)$$

↑循環節の3分割和になっている。これをZとおく

$$(10^m - 1)k_0 = 9Z$$

$$Z = \frac{(10^m - 1)_{10} k_0}{9} = (1 \cdots\cdots 1)_{10} k_0$$

$k_0 p = r_0 + r_m + r_{2m} = 1 + r_m + r_{2m}$ より

$$Z = \frac{(1 \cdots\cdots 1)_{10} \cdot (1 + r_m + r_{2m})}{p}$$

公式 [$\frac{1}{9p}$ の3分割和]

$\dfrac{1}{9p}$ を10進数に小数展開したときの3分割和を Z とおくと、

$$Z = \frac{(1 \cdots\cdots 1)_{10} \cdot (1 + r_m + r_{2m})}{p}$$

□■□定理の証明□■□

定理 1.

$p \equiv 1 \bmod 6$ のとき

循環節が3の倍数ならば3分割和は

$[1, 3, \cdots\cdots, 3, 2]$ または $[3, 3, \cdots\cdots, 3, 3]$

$\boxed{\text{証明}}$

$\frac{1}{9p}$ を10進数に小数展開したときの3分割和は $Z = \frac{(1\cdots\cdots1)_{10}\cdot(1+r_m+r_{2m})}{p}$

$\boxed{1 + r_m + r_{2m} = 3l_0p}$ とおき l_0 の決定を行う。

$$3pl_0 \leq 18p - 1$$

$$l_0 \leq 5$$

一方、 $r_j \equiv 10^j \bmod 9p$ より

$$k_0 p = r_0 + r_m + r_{2m} \equiv 1 + 10^m + 10^{2m} \bmod 9p$$

$$1 + r_m + r_{2m} \equiv 3 \bmod 9$$

$$3l_0 p \equiv 3 \bmod 9$$

$$l_0 p = 1 \bmod 3$$

$$l_0 \equiv 2 \bmod 3 \text{ ならば } p \equiv 2 \bmod 3$$

ここで $\boxed{u \text{は} p-1 \text{の約数}}$ なので $p - 1 = us$ とかける。

$$p = 1 + 3ms$$

$$p = 1 + 3t$$

$$p = 1 + 6n$$

つまり、u が3の倍数のときは $\boxed{p \equiv 1 \bmod 6}$

よって、
$$p \equiv 2 + 3k = 1 + 6n$$
$$1 = 6n - 3k = 3(2n - 1)$$
これは矛盾。

$l_0 \neq 2, l_0 \neq 5$であることがわかった。

$l_0 \leq 5$ ゆえに

$l_0 = 1$ と $l_0 = 4$ である。

$\blacksquare$

♠ たしかめ ♠

$Z=\frac{(1\cdots\cdots1)_{10}\cdot(1+r_m+r_{2m})}{p}$ は　$1+r_m+r_{2m}=3l_0p$ より

$$Z=\frac{(1\cdots\cdots1)_{10}\cdot 3l_0p}{p}$$

$l_0=1$ を代入すれば

$$\begin{aligned}Z&=\frac{(1\cdots\cdots1)_{10}\cdot3p}{p}\\&=(1\cdots\cdots1)_{10}\cdot3=(3,3,\cdots\cdots,3,3)\end{aligned}$$

$l_0=4$ を代入すれば

$$\begin{aligned}Z&=\frac{(1\cdots\cdots1)_{10}\cdot12p}{p}\\&=(1\cdots\cdots1)_{10}\cdot12=(1,3,\cdots\cdots,3,2)\end{aligned}$$

途中でこれは赤とします
これは緑
これはカーネーションCarnationPink
これはForestGreen
これはLimeGreen
これはLimeGreen
これはLimeGreen
枠緑 背景は青色
枠赤　背景黄色
字の背景に色をつけましょう
これは黄色
これは赤

ジャングルグリーン　グリーンイエロー
Goldenrod　アプリコット
メロン　オレンジ
ビタースイート
れんが　すみれ
桑の実暗紅　鮮やか赤紫
あざみ　蘭
プラム
ペリウィンクル　コーンフラワーブルー
ネイビーブルー　緑がかかった青色
スカイブルー　暗い灰色がかった青
ブルーグリーン　ジャングルグリーン
緑　パイングリーン
イエローグリーン　オリーブグリーン
セピア　黄褐色
ブラック

黄色
たんぽぽ　ピーチ　イエローオレンジ
レッドオレンジ　マロン　オレンジレッド
ワイルドベリー　**Rubine**赤　サーモン
まぜんた?　赤緑生物体の染色用　**RED**すみれ　すみれ　紫
Orchid　ラベンダ　ブルーすみれ
CADETブルー　みっどないと　ロイヤルブルー
プロセスブルー　ターコイズ　アクアマリン
エメラルド　シーグリーン　フォレストグリン
ライムグリン　スプリンググリン　ブラウン
グレー

平面代数曲線は古くから研究されてきた
ここに１０行位書く
命題 proposition

Figure 1