循環節の２分割和についての研究

学習院大学 理学部 数学科
中山 夕佳

まず、次のような例について考える。
$\frac{1}{7}$を小数に10進展開して、

$$\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$$

循環節[1, 4, 2, 8, 5, 7]を半分に分けて足すと

$$142 + 857 = \mathbf{999}$$

2分割和

$\frac{1}{N}$を小数に展開した時、循環節の長さが偶数ならば、
それを2分割し、桁上がりも考えて対応する成分を足して
出来た数

特に、$\frac{1}{N}$を10進数に小数展開したとき、
Nが素数ならば、2分割和に$\mathbf{9}$が並ぶことは、1801年Goodwin
によって証明されている。

次に、合成数の2分割和について考える。
$3 \times 7 = 21$ より、$\frac{1}{21}$ を小数に10進展開して、

$$\frac{1}{3 \times 7} = \frac{1}{21} = 0.\dot{0}4761\dot{9}$$

よって2分割和は、

$$047 + 619 = \mathbf{666}$$

◇ 分母が合成数になると、2分割和が変わる ◇

☆目的☆

この研究においては $\frac{1}{N}$ を小数に10進展開するとき、
$N = 9p(p \geq 7, \text{素数})$ の場合の2分割和についてどのような性質が成り立つか研究を行う。

☆考察☆

◇ $\frac{1}{9p}$ の２分割和には、9以下の3と互いに素な６つの数字 $1, 2, 4, 5, 7, 8$ のいずれかが連続して並ぶ。

◇ $N = 9p$ となる自然数 N について
mod 18で考えると、2分割和の性質が一意的に決まる。

定理

$\star\ p \equiv 11 \mod 18$ のとき、2分割和は$[11\cdots11]$(表2)
$\star\ p \equiv 1 \mod 18$ のとき、2分割和は$[22\cdots22]$(表3)
$\star\ p \equiv 5 \mod 18$ のとき、2分割和は$[44\cdots44]$(表4)
$\star\ p \equiv 13 \mod 18$ のとき、2分割和は$[55\cdots55]$(表5)
$\star\ p \equiv 17 \mod 18$ のとき、2分割和は$[77\cdots77]$(表6)
$\star\ p \equiv 7 \mod 18$ のとき、2分割和は$[88\cdots88]$(表7)

☆証明☆

Ⅰ.2分割和を導く。

公式

$\frac{1}{9p}$を10進数に小数展開したときの２分割和をZとおくと、
k_0を正整数として、

$$Z = (11\cdots 11) \times k_0$$

が成り立つ。

$\frac{1}{p}$を10進数に小数展開した時の周期を$\lambda(p) = u$とおくと、
ベルヌーイの定理より、

$$\lambda(9p) = u$$

uが偶数のとき、$u = 2m$とおくと、

$$10^u = 10^{2m} \equiv 1 \mod 9p \cdots (*)$$

$$(10^1 \not\equiv 1 \mod 9p)$$

$(*)$の式について、法の条件を9とpに分けて考えると、

$$\begin{cases} 10^m \equiv -1 \mod p \\ 10^m \equiv +1 \mod 9 \end{cases}$$

$\frac{1}{9p}$(既約の真分数)の10進数の小数展開において、商をq、余りをrとすると、

$$\begin{aligned} & r_{j+m} + r_j \equiv 0 \mod p \\ \Longleftrightarrow\ & r_j + r_{j+m} = pk_j (k\text{:整数}) \cdots ① \end{aligned}$$

また、

$$10r_j = 9pq_{j+1} + r_{j+1} \cdots ②$$
$$10r_{j+m} = 9pq_{j+m+1} + r_{j+m+1} \cdots ③$$

①,②,③より、

$$10k_j = 9(q_{j+1} + q_{j+m+1}) + k_{j+1}$$

$q_j + q_{j+m} = Q_j$ とおくと、

$$10k_j - k_{j+1} = 9Q_{j+1}$$

これを、$j = 0, 1, 2, \cdots$ について考えていくと、

$$\begin{cases} 10k_0 - k_1 = 9Q_1 \\ 10k_1 - k_2 = 9Q_2 \\ \qquad\quad \vdots \\ 10k_{m-1} - k_m = 9Q_m \end{cases}$$

最初の式の両辺に、10^{m-1}、次の式に 10^{m-2} をかけ、これを続けていくと、

$$\begin{cases} 10^m k_0 - 10^{m-1} k_1 = 9 \times 10^{m-1} Q_1 \\ 10^{m-1} k_1 - 10^{m-2} k_2 = 9 \times 10^{m-2} Q_2 \\ \qquad\quad \vdots \\ 10k_{m-1} - k_0 = 9Q_m \end{cases}$$

これらの式を辺々足すと、

$$(10^m - 1)k_0 = 9(\underline{10^{m-1}Q_1 + 10^{m-2}Q_2 + \cdots + Q_m})$$

下線部は、2分割和になっている。

2分割和をZとおきかえると、

$$\begin{aligned} Z &= \frac{(10^m - 1)}{9} \times k_0 \\ &= \frac{(99\cdots99)_{10}}{9} \times k_0 \\ &= (11\cdots11)_{10} \times k_0 \end{aligned}$$

公式を示すことが出来た。

Ⅱ.公式　$Z = (11\cdots11) \times k_0$　におけるk_0を決定する

①と余りの性質から、

$$\begin{aligned} r_m = k_0 p - 1 &\leq 9p - 1 \\ \Leftrightarrow &\boxed{k_0 \leq 9} \cdots ④ \end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned} k_0 p = r_0 + r_m &\equiv 1 + 10^m \bmod 9p \\ \Leftrightarrow &\boxed{k_0 p \equiv 2 \bmod 9} \cdots ⑤ \end{aligned}$$

④と⑤を満たすk_0と$p \bmod 9$の値を表にまとめると、
次のようになる。

$p \bmod 9$	2	1	×	5	4	×	8	7	×
ko	1	2	3	4	5	6	7	8	9

♣ $p \equiv 2 \mod 9$ ならば、$k_0 = 1$になる。
また、pは奇数なので、$p = 2k + 1$(k:整数) とおく。

$$2k + 1 \equiv 2 \mod 9$$
$$10k \equiv 5 \mod 9$$
$$k \equiv 5 \mod 9$$

$k = 9l + 5$(l:整数) を$p = 2k + 1$に代入すると、$p = 18l + 11$
よって、$p \equiv 11 \mod 18$のとき、

$$Z = (11 \cdots 11) \times 1 = [11 \cdots 11]_{10}$$

例 1 $p = 101$のとき

$101 \equiv 11 \mod 18$

$$\frac{1}{9 \times 101} = \frac{1}{909} = 0.\dot{0}01\dot{1}$$

よって

$$Z = 00 + 11 = \mathbf{11}$$

♣ $p \equiv 1 \mod 9$ ならば、$k_0 = 2$になる。
pは奇数なので、$p = 2k + 1$(k:整数) とおく。

$$2k + 1 \equiv 1 \mod 9$$
$$2k \equiv 0 \mod 9$$
$$k \equiv 0 \mod 9$$

$k = 9l$(l:整数) を$p = 2k + 1$に代入すると、$p = 18l + 1$
よって、$p \equiv 1 \mod 18$のとき、

$$Z = (11 \cdots 11) \times 2 = [22 \cdots 22]_{10}$$

例 2 $p = 73$のとき

$73 \equiv 1 \mod 18$

$$\frac{1}{9 \times 73} = \frac{1}{657} = 0.\dot{0}015220\dot{7}$$

よって

$$Z = 0015 + 2207 = \mathbf{2222}$$

同様に計算していくと、
$k_0=4$、$p\equiv 5 \bmod 18$のとき、

$$Z=(11\cdots11)\times 4=[44\cdots44]_{10}$$

$k_0=5$、$p\equiv 13 \bmod 18$のとき、

$$Z=(11\cdots11)\times 5=[55\cdots55]_{10}$$

$k_0=7$、$p\equiv 17 \bmod 18$のとき、

$$Z=(11\cdots11)\times 7=[77\cdots77]_{10}$$

$k_0=8$、$p\equiv 7 \bmod 18$のとき、

$$Z=(11\cdots11)\times 8=[88\cdots88]_{10}$$

よって、定理が証明出来た。

平面代数曲線は古くから研究されてきたここに１０行位書く

Figure 1

ジャングルグリーン　グリーンイエロー
Goldenrod　アプリコット
メロン　オレンジ
ビタースイート
れんが　すみれ
桑の実暗紅　鮮やか赤紫
あざみ　蘭
プラム
ペリウィンクル　コーンフラワーブルー
ネイビーブルー　緑がかった青色
スカイブルー　暗い灰色がかった青
ブルーグリーン　ジャングルグリーン
緑　パイングリーン
イエローグリーン　オリーブグリーン

黄色

たんぽぽ　ピーチ　イエローオレンジ

レッドオレンジ　マロン　オレンジレッド

ワイルドベリー　Rubine赤　サーモン

まぜんた?　赤緑生物体の染色用　REDすみれ　すみれ　紫

Orchid　ラベンダ　ブルーすみれ

CADETブルー　みっどないと　ロイヤルブルー

プロセスブルー　ターコイズ　アクアマリン

エメラルド　シーグリーン　フォレストグリン

ライムグリン　スプリンググリン　ブラウン

グレー