2次無理数の連分数展開について

学習院大学 理学部 数学科

06-043-026 06-043-045

佐藤 文也　浜口 学士

連分数とは

例えば,次のような形である.

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}}$$

$$(a_0 \in \mathbb{Z},\ a_n \in +\mathbb{Z})$$

これを簡単に$[a_0, a_1, a_2, a_3]$と書くことにする.

また,上のように分子がすべて1であるものを特に**正則連分数**という.

正則連分数展開の方法

いま,ある実数ωが与えられたとする.ωを超えない最大の整数をa_0とし, $\omega = a_0 + \dfrac{1}{\omega_1}$となるよう$\omega_1$を定める. ω_1が整数でないならば,ω_1を超えない最大の整数をa_1とし,
$\omega_1 = a_1 + \dfrac{1}{\omega_2}$となるよう$\omega_2$を定める.

以下,この作業を繰り返すことによりn段までの連分数

$$\omega = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots\, a_{n-1} + \cfrac{1}{\omega_n}}}}$$

を求めることができる.

もしωが有理数なら,この作業は有限回で終了するが,無理数なら無限回この作業が続く. 無限回続いた場合,途中から循環することがあれば,循環部に上線を用いて$[a_0, a_1, \overline{a_2, \cdots, a_n}]$と書く.

この時,初項から循環する場合,即ち$[\overline{a_0, a_1, \ldots, a_n}]$となる場合,これを**純循環**すると呼ぶ.

今回はある数ωを2次無理数に限定し,更に正則連分数でない場合,即ち分子がすべて2である場合とすべて3である場合に焦点を合わせ,分子が1である場合とどう違いが現れるかを考察した.

分子がすべて2である連分数展開を$[a_0, \ldots, a_n]_2$,同様に分子がすべて3である場合は$[a_0, \ldots, a_n]_3$と書くことにする.

定義 (2次無理数)

$X=\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ の部分集合 X_2 を次のように定義する.

$$X_2=\{\alpha\in X\cap\overline{\mathbb{Q}};deg f_\alpha=2\}$$

ここで f_α は α の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式であり, X_2 の数を2次の無理数と呼ぶ.

また,α の共役を $\overline{\alpha}$ と書く.

更に,$\alpha\in X_2(D)$ が

$$\alpha>1,-1<\overline{\alpha}<0\ \ (i.e.\quad -\frac{1}{\bar{\alpha}}>1)$$

を満足するとき,α は簡約されている (reduced) といい,$X_2(D)$ のうち,簡約されているもの全体の部分集合を $R_2(D)$ で表す.

例えば,2次無理数として$\sqrt{3}$を取り上げると,

$$\sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

となるので,これは

$$\sqrt{3} = [1, \overline{1, 2}]$$

と書ける.

定理　オイラー・ラグランジュ

$\alpha \in X$ に対して、

(1)$\alpha \in X_2 \Longleftrightarrow \alpha$ の連分数展開が循環である.
(2)$\alpha \in R_2(D(\alpha)) \Longleftrightarrow \alpha$ の連分数展開は純循環である.

$\sqrt{N}$ の性質

$$(1)[a_0, \overline{a_1, \ldots, a_{n-1}, 2a_0}]$$

$$(2)a_i = a_{n-i} \quad (1 \leq i \leq n-1)$$

具体例

$$\sqrt{162} = [12, \overline{1, 2, 1, 2, 12, 2, 1, 2, 1, 24}]$$

Table 1: 正則連分数

$\sqrt{N}$	展開
2	$[1,\overline{2}]$
3	$[1,\overline{1,2}]$
5	$[2,\overline{4}]$
6	$[2,\overline{2,4}]$
7	$[2,\overline{1,1,1,4}]$
8	$[2,\overline{1,4}]$
10	$[3,\overline{6}]$
11	$[3,\overline{3,6}]$
12	$[3,\overline{2,6}]$
13	$[3,\overline{1,1,1,1,6}]$
14	$[3,\overline{1,2,1,6}]$
15	$[3,\overline{1,6}]$
17	$[4,\overline{8}]$

$\sqrt{N}$	展開
23	$[4,\overline{1,3,1,8}]$
24	$[4,\overline{1,8}]$
26	$[5,\overline{10}]$
27	$[5,\overline{5,10}]$
28	$[5,\overline{3,2,3,10}]$
29	$[5,\overline{2,1,1,2,10}]$
30	$[5,\overline{2,10}]$
31	$[5,\overline{1,1,3,5,3,1,1,10}]$
32	$[5,\overline{1,1,1,10}]$
33	$[5,\overline{1,2,1,10}]$
34	$[5,\overline{1,4,1,10}]$
35	$[5,\overline{1,10}]$
37	$[6,\overline{12}]$
38	$[6,\overline{6,12}]$
39	$[6,\overline{4,12}]$

$\sqrt{N}$	展開
45	$[6,\overline{1,2,2,2,1,12}]$
46	$[6,\overline{1,3,1,1,2,6,2,1,1,3,1,12}]$
47	$[6,\overline{1,5,1,12}]$
48	$[6,\overline{1,12}]$
50	$[7,\overline{14}]$
51	$[7,\overline{7,14}]$
52	$[7,\overline{4,1,2,1,4,14}]$
53	$[7,\overline{3,1,1,3,14}]$
54	$[7,\overline{2,1,6,1,2,14}]$
55	$[7,\overline{2,2,2,14}]$
56	$[7,\overline{2,14}]$
57	$[7,\overline{1,1,4,1,1,14}]$
58	$[7,\overline{1,1,1,1,1,1,14}]$
59	$[7,\overline{1,2,7,2,1,14}]$
60	$[7,\overline{1,2,1,14}]$

$\sqrt{N}$	展開
67	$[8,\overline{5, 2, 1, 1, 7, 1, 1, 2, 5, 16}]$
68	$[8,\overline{4, 16}]$
69	$[8,\overline{3, 3, 1, 4, 1, 3, 3, 16}]$
70	$[8,\overline{2, 1, 2, 1, 2, 16}]$
71	$[8,\overline{2, 2, 1, 7, 1, 2, 2, 16}]$
72	$[8,\overline{2, 16}]$
73	$[8,\overline{1, 1, 5, 5, 1, 1, 16}]$
74	$[8,\overline{1, 1, 1, 1, 16}]$
75	$[8,\overline{1, 1, 1, 16}]$
76	$[8,\overline{1, 2, 1, 1, 5, 4, 5, 1, 1, 2, 1, 16}]$
77	$[8,\overline{1, 3, 2, 3, 1, 16}]$
78	$[8,\overline{1, 4, 1, 16}]$
79	$[8,\overline{1, 7, 1, 16}]$
80	$[8,\overline{1, 16}]$
82	$[9,\overline{18}]$

$\sqrt{N}$	展開
88	$[9,\overline{2,1,1,1,2,18}]$
89	$[9,\overline{2,3,3,2,18}]$
90	$[9,\overline{2,18}]$
91	$[9,\overline{1,1,5,1,5,1,1,18}]$
92	$[9,\overline{1,1,2,4,2,1,1,18}]$
93	$[9,\overline{1,1,1,4,6,4,1,1,1,18}]$
94	$[9,\overline{1,2,3,1,1,5,1,8,1,5,1,1,3,2,1,18}]$
95	$[9,\overline{1,2,1,18}]$
96	$[9,\overline{1,3,1,18}]$
97	$[9,\overline{1,5,1,1,1,1,1,1,5,1,18}]$
98	$[9,\overline{1,8,1,18}]$
99	$[9,\overline{1,18}]$

Table 2: $\sqrt{N}$:分子2連分数

$\sqrt{N}$	展開
2	$[1, \overline{4, 2}]_2$
3	$[1, \overline{2}]_2$
5	$[2, \overline{8, 4}]_2$
6	$[2, \overline{4}]_2$
7	$[2, \overline{3, 20, 3, 4}]_2$
8	$[2, \overline{2, 4}]_2$
10	$[3, \overline{12, 6}]_2$
11	$[3, \overline{6}]_2$
12	$[3, \overline{4, 6}]_2$
13	$[3, \overline{3, 6}]_2$
14	$[3, \overline{2, 2, 2, 6}]_2$
15	$[3, \overline{2, 6}]_2$
17	$[4, \overline{16, 8}]_2$

$\sqrt{N}$	展開
23	$[4,\overline{2,3,2,8}]_2$
24	$[4,\overline{2,8}]_2$
26	$[5,\overline{20,10}]_2$
27	$[5,\overline{10}]_2$
28	$[5,\overline{6,2,6,10}]_2$
29	$[5,\overline{5,10}]_2$
30	$[5,\overline{4,10}]_2$
31	$[5,\overline{3,3,2,4,2,3,3,10}]_2$
32	$[5,\overline{3,44,3,10}]_2$
33	$[5,\overline{2,2,2,10}]_2$
34	$[5,\overline{2,4,2,10}]_2$
35	$[5,\overline{2,10}]_2$
37	$[6,\overline{24,12}]_2$
38	$[6,\overline{12}]_2$
39	$[6,\overline{8,12}]_2$

$\sqrt{N}$	展開
45	$[6, \overline{2, 2, 4, 2, 2, 12}]_2$
46	$[6, \overline{2, 3, 3, 5, 4, 5, 3, 3, 2, 12}]_2$
47	$[6, \overline{2, 5, 2, 12}]_2$
48	$[6, \overline{2, 12}]_2$
50	$[7, \overline{28, 14}]_2$
51	$[7, \overline{14}]_2$
52	$[7, \overline{9, 4, 9, 14}]_2$
53	$[7, \overline{7, 14}]_2$
54	$[7, \overline{5, 2, 2, 2, 5, 14}]_2$
55	$[7, \overline{4, 2, 4, 14}]_2$
56	$[7, \overline{4, 14}]_2$
57	$[7, \overline{3, 3, 14}]_2$
58	$[7, \overline{3, 8, 30, 8, 3, 14}]_2$
59	$[7, \overline{2, 2, 14}]_2$
60	$[7, \overline{2, 2, 2, 14}]_2$

$\sqrt{N}$	展開
67	$[8, \overline{10, 2, 3, 2, 3, 6, 2, 2, 2, 64, 2, 2, 2, 6, 3, 2, 3, 2, 10, 16}]_2$
68	$[8, \overline{8, 16}]_2$
69	$[8, \overline{6, 3, 2, 4, 2, 3, 6, 16}]_2$
70	$[8, \overline{5, 4, 5, 16}]_2$
71	$[8, \overline{4, 2, 2, 7, 2, 2, 4, 16}]_2$
72	$[8, \overline{4, 16}]_2$
73	$[8, \overline{3, 2, 2, 22, 34, 22, 2, 2, 3, 16}]_2$
74	$[8, \overline{3, 6, 8, 6, 3, 16}]_2$
75	$[8, \overline{3, 68, 3, 16}]_2$
76	$[8, \overline{2, 2, 3, 2, 2, 16}]_2$
78	$[8, \overline{2, 4, 2, 16}]_2$
79	$[8, \overline{2, 7, 2, 16}]_2$
80	$[8, \overline{2, 16}]_2$
82	$[9, \overline{36, 18}]_2$
83	$[9, \overline{18}]_2$

$\sqrt{N}$	展開
89	$[9, \overline{4, 3, 6, 2, 36, 2, 6, 3, 4, 18}]_2$
90	$[9, \overline{4, 18}]_2$
91	$[9, \overline{3, 2, 2, 4, 2, 2, 3, 18}]_2$
92	表示できず
93	$[9, \overline{3, 18}]_2$
94	表示できず
95	$[9, \overline{2, 2, 2, 18}]_2$
96	$[9, \overline{2, 3, 2, 18}]_2$
97	$[9, \overline{2, 5, 3, 8, 12, 2, 8, 2, 12, 8, 3, 5, 2, 18}]_2$
98	$[9, \overline{2, 8, 2, 18}]_2$
99	$[9, \overline{2, 18}]_2$

Table 3: 分子3連分数

$\sqrt{N}$	展開
2	$[1, 7, \overline{12, 8}]_3$
3	$[1, 4, \overline{30, 5}]_3$
5	$[2, \overline{12, 4}]_3$
6	$[2, \overline{6, 4}]_3$
7	$[2, \overline{4}]_3$
8	$[2, \overline{3, 4}]_3$
10	$[3, \overline{18, 6}]_3$
11	$[3, \overline{9, 6}]_3$
12	$[3, \overline{6}]_3$
13	$[3, \overline{4, 3, 20, 3, 4, 6}]_3$
14	$[3, \overline{4, 66, 4, 6}]_3$
15	$[3, \overline{3, 6}]_3$
17	$[4, \overline{24, 8}]_3$

$\sqrt{N}$	展開
23	$[4,\overline{3,3,3,8}]_3$
24	$[4,\overline{3,8}]_3$
26	$[5,\overline{30,10}]_3$
27	$[5,\overline{15,10}]_3$
28	$[5,\overline{10}]_3$
29	$[5,\overline{5,1,39,4,3,3,7,10}]_3$
30	$[5,\overline{6,10}]_3$
31	$[5,\overline{5,10}]_3$
32	[表示できず]$_3$☆☆
33	$[5,\overline{4,102,4,10}]_3$
34	$[5,\overline{3,4,3,10}]_3$
35	$[5,\overline{3,10}]_3$
37	$[6,\overline{36,12}]_3$
38	$[6,\overline{18,12}]_3$
39	$[6,\overline{12}]_3$

$\sqrt{N}$	展開
45	$[6,\overline{4,12}]_3$
46	$[6,\overline{3,3,5,60,5,3,3,12}]_3$
47	$[6,\overline{3,5,3,12}]_3$
48	$[6,\overline{3,12}]_3$
50	$[7,\overline{42,14}]_3$
51	$[7,\overline{21,14}]_3$
52	$[7,\overline{14}]_3$
53	[表示できず]$_3$
54	[表示できず]$_3$ ☆☆☆
55	$[7,\overline{7,14}]_3$
56	$[7,\overline{6,14}]_3$
57	$[7,\overline{5,6,5,14}]_3$
58	$[7,\overline{4,3,6,3,4,14}]_3$
59	[表示できず]$_3$ ☆☆☆
60	$[7,\overline{4,138,4,14}]_3$

$\sqrt{N}$	展開
67	$[8, \overline{16}]_3$
68	$[8, \overline{12, 16}]_3$
69	$[8, \overline{9, 3, 3, 4, 3, 3, 9, 16}]_3$
70	$[8, \overline{8, 16}]_3$
71	$[8, \overline{7, 75, 7, 16}]_3$
72	$[8, \overline{6, 16}]_3$
73	$[8, \overline{5, 5, 3, 4, 3, 5, 5, 16}]_3$
74	$[8, \overline{4, 3, 50, 3, 4, 16}]_3$
75	[表示できず]$_3$
76	$[8, \overline{4, 16}]_3$
77	$[8, \overline{3, 3, 6, 3, 3, 16}]_3$
78	$[8, \overline{3, 4, 3, 16}]_3$
79	$[8, \overline{3, 7, 3, 16}]_3$
80	$[8, \overline{3, 16}]_3$
82	$[9, \overline{54, 18}]_3$

$\sqrt{N}$	展開
88	$[9, \overline{7, 3, 7, 18}]_3$
89	$[9, \overline{6, 3, 10, 6, 5, 4, 3, 9, 3, 168, 3, 9, 4, 3, 5, 6, 10, 3, 6, 18}]_3$
90	$[9, \overline{6, 18}]_3$
91	$[9, \overline{5, 5, 8, 3, 4, 3, 4, 3, 8, 5, 5, 18}]_3$
92	$[9, \overline{5, 42, 5, 18}]_3$
93	[表示できず]$_3$ ☆☆☆☆☆
94	$[9, \overline{4, 9, 5, 5, 3, 8, 3, 5, 5, 9, 4, 18}]_3$
95	$[9, \overline{4, 174, 4, 18}]_3$
96	$[9, \overline{3, 3, 3, 8}]_3$
97	[表示できず]$_3$
98	$[9, \overline{3, 8, 3, 18}]_3$
99	$[9, \overline{3, 18}]_3$

ここで,分子3の表より循環部が3項目から始まるものが現れた.

Table 4. 分子3連分数

$\sqrt{N}$	展開
2	$[1,7,\overline{12,8}]_3$
3	$[1,4,\overline{30,5}]_3$

これはω_1が簡約された2次無理数にならないためである.

$$x > 2[\sqrt{N}]$$

xは連分数展開時の分子

正則の時より,分子2や3の方が循環部を短く抑えられる場合が多々あった.

実際,

TABLE 5. 循環部の長さ

$\sqrt{N}$	分子1	分子2	分子3
22	6	3	2
76	12	6	2
86	10	6	6
103	12	8	1

などがあった.

分子2のものの中から,循環部の長さが1であるものに着目した.

Table 6: 分子2,長さ1

$\sqrt{N}$	展開
3	$[1,\overline{2}]$
6	$[2,\overline{4}]$
11	$[3,\overline{6}]$
$\vdots$	$\vdots$
51	$[7,\overline{14}]$
66	$[8,\overline{16}]$
83	$[9,\overline{18}]$
$\vdots$	$\vdots$

これより,分子2,長さ1のときのNは,(平方数+2)であると予想でき,次の定理が得られた.

定理 2.1

分子がすべて2である2次無理数の連分数展開において,循環部の長さが1であるものは$\sqrt{a^2+2}\,(a \in \mathbb{Z})$から得られる.

証明

任意の数$N \in \mathbb{N}$があり,$\sqrt{N}$を分子がすべて2で連分数展開したときの循環部の長さを1とすると,

$$\sqrt{N} = a + \cfrac{2}{b + \cfrac{2}{b + \cfrac{2}{\ddots}}}$$

となる.ここで,

$$X = b + \cfrac{2}{b + \cfrac{2}{b + \cfrac{2}{\ddots}}}$$

とおくと, $X = b + \dfrac{2}{X}$ となり, これを解くと, $X = \dfrac{b + \sqrt{b^2 + 8}}{2}$ となる.

これを $\sqrt{N}$ に代入すると,

$$\begin{aligned}\sqrt{N} &= a + \frac{2}{X} \\ &= a + \frac{4}{b + \sqrt{b^2 + 8}} \\ &= a - \frac{b - \sqrt{b^2 + 8}}{2}\end{aligned}$$

両辺を2乗すると,

$$N = \frac{2a^2 - 2ba + b^2 + 4}{2} + \frac{2a - b}{2}\sqrt{b^2 + 8}$$

ここで,$b^2 + 8$**が平方数にならない**ことを示す.

$b^2 + 8 = y^2$ とおくと,

$$\begin{aligned}
& b^2 - y^2 = -8 \\
& \quad \Rightarrow (b + y)(b - y) = -8 \\
& \quad \Rightarrow (b{+}y, b{-}y) = (\pm 8, \mp 1), (\mp 1, \pm 8), (\pm 4, \mp 2), (\mp 2, \pm 4) \\
& \quad \Rightarrow (b, y) = (1, 3)
\end{aligned}$$

よって, $b = 1$ の時のみ $b^2 + 8$ は平方数になる.
しかし N に $b = 1$ を代入すると

$$N = a^2 + \frac{7}{2}$$

$N \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{Z}$ より, 上式は成立たない.
以上より $b \neq 1$ であり,b^2+8 は平方数にはならない.

よって次の式が得られ,

$$N = \frac{2a^2 - 2ba + b^2 + 4}{2} \tag{1}$$

$$b = 2a \tag{2}$$

(2) を (1) に代入すると,

$$N = \frac{2a^2 - 4a^2 + 4a^2 + 4}{2} = a^2 + 2$$

となる.

これで十分条件が示された.

次に,必要条件を示す.

$\sqrt{a^2+2}$を分子2で連分数展開すると,

$$\sqrt{a^2+2} = a + \cfrac{2}{\cfrac{2}{\sqrt{a^2+2}-a}}$$

$$= a + \cfrac{2}{2a + \cfrac{2}{\cfrac{2}{\sqrt{a^2+2}-a}}}$$

$\dfrac{2}{\sqrt{a^2+2}-a}$が2度出てきたので,以降$2a$がずっと続く.よって

$$\sqrt{a^2+2} = [a, \overline{2a}]_2$$

と書ける.以上より分子が2,循環部の長さが1のときのNは(平方数+2)となることが証明された.

次に,循環部の長さが2のものを集めてみた.

Table 7: 分子2,長さ2

$\sqrt{N}$	展開
2	$[1,\overline{4,2}]$
5	$[2,\overline{8,4}]$
8	$[2,\overline{2,4}]$
10	$[3,\overline{12,6}]$
12	$[3,\overline{4,6}]$
13	$[3,\overline{3,6}]$
15	$[3,\overline{2,6}]$
17	$[4,\overline{16,8}]$
20	$[4,\overline{4,8}]$
24	$[4,\overline{2,8}]$
$\vdots$	$\vdots$

この表からはNの形が予想できなかったので, 上の証明と同じ論法でNの形を求めてみた.

長さ1と同じ方法でNを求めると

$$\begin{aligned} c &= 2a \\ N &= a^2 + \frac{4a}{b} \end{aligned}$$

更に,$N \in \mathbb{N}$より,bは$4a$の約数.

$\sqrt{N} - 1 < a < \sqrt{N}$より,

$$
\begin{aligned}
N &< a^2 + 2a + 1 \\
&\Rightarrow a^2 + \frac{4a}{b} < a^2 + 2a + 1 \quad (N = a^2 + \frac{4a}{b}) \\
&\Rightarrow \frac{4a}{2a+1} < b \\
&\Rightarrow 2 - \frac{2}{2a+1} < b \\
&\Rightarrow 1.\cdots < b \\
&\Rightarrow 1 < b
\end{aligned}
$$

以上より,次の定理が得られた.

定理 2.2

分子が2である2次無理数の連分数展開において,循環部の長さが2であるものは$\sqrt{a^2+\dfrac{4a}{b}}$から得られる.

但し,bは$4a$の約数,かつ$1 < b$.

分子3でも同様に考えると,

Table 8. 分子3, 長さ1

$\sqrt{N}$	展開
7	$[2;\overline{4}]$
12	$[3;\overline{6}]$
19	$[4;\overline{8}]$
28	$[5;\overline{10}]$
39	$[6;\overline{12}]$

$$\begin{aligned} b &= 2a \\ N &= a^2 + 3 \end{aligned}$$

分子3,長さ2でも同様のことが言えた.

$$\begin{aligned} c &= 2a \\ N &= a^2 + \frac{6a}{b} \end{aligned}$$

更に,$N \in \mathbb{N}$より,bは$6a$の約数.

$\sqrt{N} - 1 < a < \sqrt{N}$より,

$$\begin{aligned} N &< a^2 + 2a + 1 \\ &\Rightarrow a^2 + \frac{6a}{b} < a^2 + 2a + 1 \quad (N = a^2 + \frac{6a}{b}) \\ &\Rightarrow 2 - \frac{2}{2a+1} < b \\ &\Rightarrow 2.\cdots < b \\ &\Rightarrow 2 < b \end{aligned}$$

まったく同じ論法から得られた定理をまとめる.

定理 1.1

分子がすべて1である2次無理数の連分数展開において,循環部の長さが1であるものは$\sqrt{a^2+1}\,(a \in \mathbb{Z})$から得られる.

定理 1.2

分子がすべて1である2次無理数の連分数展開において,循環部の長さが2であるものは$\sqrt{a^2+\dfrac{2a}{b}}$から得られる.

但し,bは$2a$の約数,かつ$b \neq 2a$.

分子2のもの.

定理 2.1

分子がすべて2である2次無理数の連分数展開において,循環部の長さが1であるものは$\sqrt{a^2+2}\,(a \in \mathbb{Z})$から得られる.

定理 2.2

分子がすべて2である2次無理数の連分数展開において,循環部の長さが2であるものは$\sqrt{a^2+\dfrac{4a}{b}}$から得られる.

但し,bは$4a$の約数,かつ$1 < b$.

分子3のもの.

定理 3.1

分子がすべて3である2次無理数の連分数展開において,循環部の長さが1であるものは$\sqrt{a^2+3}\,(a \in \mathbb{Z})$から得られる.

定理 3.2

分子がすべて3である2次無理数の連分数展開において,循環部の長さが2であるものは$\sqrt{a^2+\dfrac{6a}{b}}$から得られる.

但し,bは$6a$の約数,かつ$2<b$.

Prologで表示できないものについて

例えば$\sqrt{21}$について分子3で連分数展開をすると,

$$
\begin{aligned}
\sqrt{21} &= 4 + (\sqrt{21} - 4) \\
&= 4 + \cfrac{3}{\cfrac{3(\sqrt{21}+4)}{5}}
\end{aligned}
$$

ここで $\gamma = \dfrac{3(\sqrt{21}+4)}{5}$ は

$$\gamma\ (= 5.14955\cdots) > 1, -1 < \overline{\gamma}\ (= -0.349545\cdots) < 0$$

よりγは簡約されている2次無理数で,純循環することがわかる.

ところがPrologで連分数展開をすると$[4, \underline{5, 20, 49, 8, 4, 6, 5, 5, 26, \cdots}]$となり,循環部が表示されない.

そこで$\dfrac{3(\sqrt{21}+4)}{5}$を超えない最大の整数は本当は5だが,それをわざと$4$とし,それでも駄目なら$3$とし,$\cdots$
と,1つずつ減らして連分数展開を試してみる.

今回は整数部を4としても循環部が表示されなかったので,整数部を3として連分数展開してみると,

$$
\begin{aligned}
\frac{3(\sqrt{21}+4)}{5} &= 3+\left(\frac{3(\sqrt{21}+4)}{5}-3\right) \\
&= \cdots \\
&= 3+\cfrac{3}{\cfrac{\sqrt{21}+1}{4}}
\end{aligned}
$$

となった.

$\dfrac{\sqrt{21}+3}{4}$を分子3で連分数展開すると$[1, 7, \underline{5, 20, 49, 8, 4, 6, 5, \cdots}]$と$\sqrt{21}$をそのまま展開したときと同じ数列が表れる.

以降,同じことの繰り返しにより $\sqrt{21} = [4, \overline{3, 1, 7}]$ と書くことができた.

　このパターンを☆とすると,

$$\sqrt{n^2+n+1} \to [n, \overline{3, 1, 2n-1}]$$

と書ける.

同様に☆☆は

$$\sqrt{9n^2+16n+7} \to [3n+2, \overline{3, 1, 3, 6n+4}]$$

と書けることがわかった.

途中でこれは赤とします
これは緑
これはカーネーションCarnationPink
これはForestGreen
これはLimeGreen
これはLimeGreen
これはLimeGreen
枠緑 背景は青色
枠赤 背景黄色
字の背景に色をつけましょう
これは黄色
これは赤

平面代数曲線は古くから研究されてきた
ここに１０行位書く

Figure 1