$\frac{1}{5p}$ の 2 進展開についての循環節の $\mathbf{2}$ 分割和

学習院大学理学部数学科

千徳　道子

◇目的◇

はじめに次のような例について考える。

$$\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$$

このように$\frac{1}{7}$を小数に10進展開した循環節を半分に分けて足すと

$$142 + 857 = 999$$

一般に、奇素数pについて、$\frac{1}{p^e}$の循環節の長さが偶数の時、循環節を半分に分けて加えると、9が並ぶことはよく知られている。

この研究においては、素数$p(7 \leq p \leq 1000)$について、
$\dfrac{1}{5p}$**を小数に**2**進展開**した時の循環節を

リストで$[q_1, q_2, \cdots, q_{2m}]$と表示する。

それを、

$$[q_1, q_2, \cdots, q_m], [q_{m+1}, q_{m+2}, \cdots, q_{2m}]$$

のように2分割して、桁上がりも考えて対応する成分を加えてできた数（これを2**分割和**という）について研究する。

例.

$p=7$のとき

$$\frac{1}{5p}=\frac{1}{35}=0.\dot{0}0000111010\dot{1}$$

循環節をリストで$[0,0,0,0,0,1,1,1,0,1,0,1]$と表示する。

それを$[0,0,0,0,0,1],[1,1,0,1,0,1]$と2分割して繰り上がりも考えて足す。

$$000001+110101=110110$$

$$\boxed{2\textbf{分割和}=[1,1,0,1,1,0]}$$

◇結果◇

pが7以上1000以下の素数のとき$\dfrac{1}{5p}$の2進展開の2分割和について、3つの性質ごとに表1〜3にまとめる。

ただし、λは$\dfrac{1}{p}$を2進展開したときの循環節の長さとする。

◎2分割和の性質◎

①2分割和が$[1,1,\cdots,1]$となり、1が並ぶ。（表1）

②0011またはその回転が並ぶ。（表2）

※実は、$0011, 0110, 1001, 1100$はそれぞれ$\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$を小数に2進展開したときの循環節である。

③数の並びに規則性がない。（表3）

◎λとの関係◎

λは$\dfrac{1}{p}$を2進展開したときの循環節の長さとする。
λをmod8で考える。

$\underline{\lambda = 4 \bmod 8\text{のとき、}}$2分割和に1が並ぶ。

$\underline{\lambda = 0 \bmod 8\text{のとき、}}$0011またはその回転が並ぶ。

$\underline{\lambda = 1, 2, 3, 5, 6, 7 \bmod 8\text{のとき、}}$数の並びに規則性がない。

◇考察◇

命題 1.

$\dfrac{1}{5p}$ を小数に2進展開した時の循環節の周期を u とすると、

u は必ず偶数になる。

$\boxed{\textbf{証明}}$ ベルヌーイの定理より示される。

$u = 2m$ とすると、周期の定義から、

$$2^u = 2^{2m} \equiv 1 \bmod 5p,$$

$$2^m \not\equiv 1 \bmod 5p.$$

5 と p は互いに素なので、

$$\begin{cases} 2^{2m} \equiv 1 \bmod p \\ 2^{2m} \equiv 1 \bmod 5 \end{cases}$$

5 と p は素数なので、

$$2^m \equiv \pm 1 \bmod p,$$

$$2^m \equiv \pm 1 \bmod 5.$$

次のように、mod$p$で、分類をする。

（1） A型：$2^m \equiv 1 \bmod p$
（2） B型：$2^m \equiv -1 \bmod p$

A型のときは、$2^m \equiv -1 \bmod 5$であるから $m \equiv 2 \bmod 4$

B型は、$2^m \equiv \pm 1 \bmod 5$によって、$B_{(+)}$型と、$B_{(-)}$型にさらに細分する。

（a） $B_{(+)}$型：$2^m \equiv 1 \bmod 5$
（b） $B_{(-)}$型：$2^m \equiv -1 \bmod 5$

命題 2.

$B_{(-)}$ 型では、2 分割和に 1 が並ぶ。

$\boxed{\text{証明}}$

$$2^m \equiv -1 \bmod p,\ 2^m \equiv -1 \bmod 5$$

をまとめると、

$$2^m \equiv -1 \bmod 5p$$

よって、

$$r_j + r_{j+m} \equiv r_j + 2^m r_j \equiv 0 \bmod 5p$$

これから、

$$r_j + r_{j+m} = 5p$$

が導かれた。

$$2r_j = 5pq_{j+1} + r_{j+1}$$
$$2r_{j+m} = 5pq_{j+1+m} + r_{j+1+m}$$
の、両辺を足して、
$$2(r_j + r_{j+m}) = (q_{j+1} + q_{j+1+m})5p + r_{j+1} + r_{j+1+m}$$
になるが、$r_j + r_{j+m} = 5p$により、
$$2 = q_{j+1} + q_{j+1+m} + 1$$
したがって、$Q_j = q_j + q_{j+m}$とおくと、
$j = 1, 2, \cdots, m$について、
$$\boxed{Q_j = 2 - 1 = 1}$$
が成り立つ。
　mは周期uを半分にした数なので、$(Q_1Q_2\cdots Qm)_2$は2分割和を表している。
よって命題は示された。

命題 3.

$B_{(+)}$ 型では、2 分割和に $\dfrac{k_0}{5}$ の循環節が並ぶ。

$\boxed{\text{証明}}$

$2^m \equiv -1 \bmod p$ が成り立つので、

$$r_{j+m} \equiv 2^{j+m}a \equiv -2^j a \equiv -r_j \bmod p$$

が成り立ち、

$$r_j + r_{j+m} = k_j p$$

一方、

$$2r_j = 5pq_{j+1} + r_{j+1}$$
$$2r_{j+m} = 5pq_{j+1+m} + r_{j+1+m}$$

2式の両辺どうしを加えると、

$$2(r_j + r_{j+m}) = 5p(q_{j+1} + q_{j+1+m}) + (r_{j+1} + r_{j+1+m})$$

$r_j + r_{j+m} = k_j p$ より、

$$2k_j = 5(q_{j+1} + q_{j+1+m}) + k_{j+1}$$

そこで、$q_j + q_{j+m}$をQ_jとおけば、

$$2k_j - k_{j+1} = 5Q_{j+1}$$

となり、これらを$j = 0, 1, 2, \cdots$について考えると、

$$2k_0 - k_1 = 5Q_1$$
$$2k_1 - k_2 = 5Q_2$$
$$\vdots$$
$$2k_{m-1} - k_0 = 5Q_m$$

となる。

最初の式の両辺に、2^{m-1}を、次の式の両辺に2^{m-2}を掛けていき、これらを加えると、$k_1, k_2, k_3, \cdots$が消去され、

$$(2^m - 1)k_0 = 5(2^{m-1}Q_1 + 2^{m-2}Q_2 + \cdots + Q_m)$$

となる。

$2^{m-1}Q_1+2^{m-2}Q_2+\cdots+Q_m$ は、循環節の2分割和となっているので、<u>2分割和を Z とおくと、</u>

$$\boxed{Z=\frac{2^m-1}{5}k_0}$$

さて、$2^m\equiv 1 \bmod 5$ によれば、<u>m は4の倍数である</u>。$m=4L$ と書けるので、

$$\boxed{\frac{2^m-1}{5}=\frac{2^4-1}{5}(16^{L-1}+\cdots+16+1)=(001100110011\cdots\cdots)_2}$$

これが $\dfrac{a}{5p}$ の循環節の分割和に0011またはその回転が並ぶ理由である。

分子$a=1$のとき、k_0は何になるか考える。

$r_0+r_m=k_0p$および余りの性質から、

$$r_0=a=1,\ r_m\leq 5p-1$$

$$\text{よって、}k_0\leq 5$$

一方、$k_0p=r_0+r_m\equiv 1+2^m \bmod 5p$なので、

$$1+2^m\equiv 2 \bmod 5$$

により、($B_{(+)}$型のとき、$2^m\equiv 1 \bmod 5$)

$$k_0p\equiv 2 \bmod 5$$

になるので、次の対応表が出来る。

TABLE 1. pとk_0の対応

$p \bmod 5$	1	2	3	4
k_0	2	1	4	3

$\dfrac{k_0}{5}$の循環節をL個並べたのが、$\dfrac{1}{5p}$の2分割和である。

命題 4.

A **型では、**2**分割和に**$\dfrac{k_0}{p}$**の小数展開の循環節が並ぶ。**

$\boxed{\text{証明}}$

$B_{(+)}$型の場合の5とpを入れかえることにより、次の結果が得られる。

$$Z = \frac{2^m - 1}{p} k_0$$

$2^m = 1 \bmod p$によれば、mはλの倍数。$m = \lambda L$と書かれ、

$$\frac{2^m - 1}{p} = \frac{2^{\lambda L} - 1}{p} = \frac{2^\lambda - 1}{p}(2^{\lambda(L-1)} + \cdots + 2^\lambda + 1)$$

は、$\dfrac{1}{p}$の小数展開の循環節がL個並んだものである。

分子$a = 1$のとき、$k_0 \leq p - 1,\ 5k_0 \equiv 2 \bmod p$ を満たす。

λとパターン分けの関係.

λを$\frac{1}{p}$の周期とする。ベルヌーイの定理から、

$$2m = u = LCM(4, \lambda)$$

λについて、次の3つに分類して考える。

①$\lambda \equiv 0 \bmod 4$ならば、$LCM = \lambda = 2m$

②$\lambda \equiv 2 \bmod 4$ならば、$LCM = 2\lambda,\ m = \lambda$

③$\lambda \equiv 1, 3 \bmod 4$ならば、$LCM = 4\lambda,\ m = 2\lambda$

$\boxed{\text{A型}}$

$2^m \equiv 1 \bmod p$より、mはλの倍数。よって②③が該当する。

$2^m \equiv -1 \bmod 5$より、$m \equiv 2 \bmod 4$

$\boxed{\text{B型}}$

$2^m \equiv -1 \bmod p$より、①の$\lambda \equiv 0 \bmod 4$しか起きない。

- $B_{(-)}$型

$2^m \equiv -1 \bmod 5$より、$m = 4k+2 (m \equiv 2 \bmod 4)$を
$\lambda = 2m$に代入すると、$\lambda = 2(4k+2) = 8k+4$になり、
$\lambda \equiv 4 \bmod 8$

- $B_{(+)}$型

$2^m \equiv 1 \bmod 5$より、$m = 4k (m \equiv 0 \bmod 4)$を
$\lambda = 2m$に代入すると、$\lambda = 2(4k) = 8k$になり、
$\lambda \equiv 0 \bmod 8$

　以上をまとめると、

(1) A型は$\lambda \equiv 1, 2, 3, 5, 6, 7 \mod 8$

(2) $B_{(-)}$型は$\lambda \equiv 4 \mod 8$

(3) $B_{(+)}$型は$\lambda \equiv 0 \mod 8$

のとき起きる。

$B_{(+)}$ 型の例.

<u>$p = 97$ のとき</u>

$\lambda = 48$, ($\lambda \equiv 0 \bmod 8$ になっている。)
$u = 2m = \lambda = 48,\ m = 24,\ L = 6,\ k_0 = 1$

$\frac{1}{485}(p = 97)$
2分割和=$[0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1]$

2分割和に $\frac{1}{5}$ の循環節が6個並んでいる。

A 型の例.

$\underline{p = 7 \text{のとき}}$

$\lambda = 3, (\lambda \equiv 3 \bmod 8$ になっている。)
$u = 2m = 4\lambda = 12,\ m = 6,\ L = 2,\ k_0 = 6$

$\frac{1}{35}(p = 7),\ 2$ 分割和 $= [1, 1, 0, 1, 1, 0]$

$\frac{6}{7}$ の循環節は $[1, 1, 0]$ である。$\frac{6}{7}$ の循環節が 2 個並んでいる。

◎pとの関係◎

pを$\mathrm{mod}\,24$で考える。

$\underline{p \equiv 1, 5, 13, 17\text{のとき}}$、①が起こる。

$\underline{p \equiv 1, 17\text{のとき、}}$②が起こる。

$\underline{p \equiv 1, 7, 11, 17, 19, 23\text{のとき、}}$③が起こる。

途中でこれは赤とします
これは緑
これはカーネーションCarnationPink
これはForestGreen
これはLimeGreen
これはLimeGreen
これはLimeGreen
枠緑 背景は青色
枠赤　背景黄色
字の背景に色をつけましょう
これは黄色
これは赤

平面代数曲線は古くから研究されてきた
ここに１０行位書く

Figure 1