$(1 + X + X^2)^N$ の係数の周期性

学習院大学理学部数学科
須永 誉士

この研究では$(1+x+x^2)^n$の係数に関して、$\bmod 2$、$\bmod 3$の時の周期性について調べる。

Prologを用いて$(1+x+x^2)^n$の係数を求めるプログラムを組む。

```
sankou(0,[1]).
sankou(N,L) :- N>0,N1 is N-1,
       sankou(N1,L1),
       append0(X=L1+[0]),
       append0(X1=X+[0]),
       sum_list(L2=[0,0|L1]+[0|X]),
       sum_list(L=L2+X1).

list_put9(M) :- for(1=<20,N),nl,
        sankou(N,L),
        member(X1,L),
        X is X1 mod M,
        write(X),put(9),fail.
list_put9(_).
```

```
append0(Z=[]+Z).
append0([A|Z]=[A|X]+Y) :- append0(Z=X+Y).

sum_list([]=[]+[]).
sum_list([C|Z]=[A|L]+[B|M]) :- C is A+B,
                               sum_list(Z=L+M).
```

［多項定理］

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^n = \sum \frac{n!}{p_1! p_2! \cdots p_k!} {a_1}^{p_1} {a_2}^{p_2} \cdots {a_k}^{p_k}$$

ただし、

$$p_1, p_2, \cdots, p_k \geq 0$$
$$p_1 + p_2 + \cdots + p_k = n$$

多項定理を用いて$(1+x+x^2)^n$の係数${}_n\Gamma_k (0 \leq k \leq 2n)$を定義する。

$$
\begin{aligned}
(1+x+x^2)^n &= \sum_{k=q+2r} \frac{n!}{p!q!r!}(1)^p(x)^q(x^2)^r \\
&= \sum_{k=q+2r} \frac{n!}{p!q!r!} x^{q+2r} \\
&= \sum_{k=0}^{2n} {}_n\Gamma_k x^k
\end{aligned}
$$

ただし、

$$
p, q, r \geq 0
$$

$$
p+q+r = n
$$

例えば、上の式を用いて$(1+x+x^2)^{10}$のx^7の係数を求める。このとき、$(p,q,r) = (3,7,0),(4,5,1),(5,3,2),(6,1,3)$の4つの場合分けが必要となる。

$$
\begin{aligned}
{}_{10}\Gamma_7 &= \frac{10!}{3!7!0!} + \frac{10!}{4!5!1!} + \frac{10!}{5!3!2!} + \frac{10!}{6!1!3!} \\
&= 120 + 1260 + 2520 + 840 \\
&= 4740
\end{aligned}
$$

もう少し簡単に求める為に$(1+x+x^2)^n$の係数${}_n\Gamma_k (0 \leq k \leq 2n)$について、パスカルの三角形$({}_nC_k = {}_{n-1}C_k + {}_{n-1}C_{k-1})$のような規則性を探す。

$2 \leq k \leq 2n-2$のとき、${}_{n}\Gamma_{k} = {}_{n-1}\Gamma_{k} + {}_{n-1}\Gamma_{k-1} + {}_{n-1}\Gamma_{k-2}$が成り立つ。

［証明］

$$(1+x+x^2)^{n-1} = \sum_{k=0}^{2(n-1)} {}_{n-1}\Gamma_k x^k$$

とする。

$$\begin{aligned}
(1+x+x^2)^n &= \sum_{k=0}^{2n-2} {}_{n-1}\Gamma_k x^k + x\sum_{k=0}^{2n-2} {}_{n-1}\Gamma_k x^k + x^2\sum_{k=0}^{2n-2} {}_{n-1}\Gamma_k x^k \\
&= \sum_{k=0}^{2n-2} {}_{n-1}\Gamma_k x^k + \sum_{k=0}^{2n-2} {}_{n-1}\Gamma_k x^{k+1} + \sum_{k=0}^{2n-2} {}_{n-1}\Gamma_k x^{k+2} \\
&= \sum_{k=0}^{2n-2} {}_{n-1}\Gamma_k x^k + \sum_{k=1}^{2n-1} {}_{n-1}\Gamma_{k-1} x^k + \sum_{k=2}^{2n} {}_{n-1}\Gamma_{k-2} x^k
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=2}^{2n-2} ({}_{n-1}\Gamma_k + {}_{n-1}\Gamma_{k-1} + {}_{n-1}\Gamma_{k-2})x^k$$
$$+{}_{n-1}\Gamma_0 x^0 + {}_{n-1}\Gamma_1 x^1 + {}_{n-1}\Gamma_0 x^1$$
$$+{}_{n-1}\Gamma_{2(n-1)} x^{2n-1} + {}_{n-1}\Gamma_{2(n-1)-1} x^{2n-1} + {}_{n-1}\Gamma_{2(n-1)} x^{2n}$$

$$\sum_{k=0}^{2n} {}_n\Gamma_k x^k = \sum_{k=2}^{2n-2} ({}_{n-1}\Gamma_k + {}_{n-1}\Gamma_{k-1} + {}_{n-1}\Gamma_{k-2})x^k$$
$$+1 + nx + nx^{2n-1} + x^{2n}$$

k を決めたとき、上の関係式を基にして ${}_n\Gamma_k \bmod 2$ または $\bmod 3$ の周期を見つける。

1. 結果

Table 1. ${}_{n}\Gamma_{k}$ の値

$n \diagdown x^k$	x^0	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	3	2	1	0	0	0	0	0
3	1	3	6	7	6	3	1	0	0	0
4	1	4	10	16	19	16	10	4	1	0
5	1	5	15	30	45	51	45	30	15	5
6	1	6	21	50	90	126	141	126	90	50
7	1	7	28	77	161	266	357	393	357	266
8	1	8	36	112	266	504	784	1016	1107	1016
9	1	9	45	156	414	882	1554	2304	2907	3139
10	1	10	55	210	615	1452	2850	4740	6765	8350
11	1	11	66	275	880	2277	4917	9042	14355	19855
12	1	12	78	352	1221	3432	8074	16236	28314	43252

Table 2. ${}_n\Gamma_k \bmod 2$ の値

$n \diagdown x^k$	x^0	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0
3	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0
4	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
5	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1
6	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
7	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1
8	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
9	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1
10	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1
11	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0
12	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
13	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0

kを固定して${}_n\Gamma_k \bmod 2$の周期を考える。

Table 3. mod2 で周期が 1 となる

$n \diagdown x^k$	x^0
1	1
2	1
3	1
4	1

Table 4. mod2 で周期が 2 となる

$n \diagdown x^k$	x
1	1
2	0
3	1
4	0

TABLE 5. mod2 で周期が 4 となる

$n \diagdown x^k$	x^2	x^3
1	1	0
2	1	0
3	0	1
4	0	0

TABLE 6. mod2 で周期が 8 となる

$n \diagdown x^k$	x^4	x^5	x^6	x^7
1	0	0	0	0
2	1	0	0	0
3	0	1	1	0
4	1	0	0	0
5	1	1	1	0
6	0	0	1	0
7	1	0	1	1
8	0	0	0	0

kを固定して${}_n\Gamma_k \mod 2$の周期を見ると、$(1, 2, 4, 4, 8, 8, 8, 8, 16, 16, 16, 16, 16, 16, 16, 16, 32, \cdots)$という群数列になっている。

$k=1$のときの周期２を初項とすると、その項数は$(1,2,4,8,\cdots)$と変化しており、これは初項１、公比２の等比数列である。

[予想]

$2^{m-1} \leq k \leq 2^m - 1$のとき、${}_n\Gamma_k \mod 2$の周期は$2^m$となる。

同様に${}_n\Gamma_k \bmod 3$の周期を考える。

Table 7. ${}_n\Gamma_k$ mod3 の値

$n \diagdown x^k$	x^0	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	0	2	1	0	0	0	0	0	0
3	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
5	1	2	0	0	0	0	0	0	0	2	1
6	1	0	0	2	0	0	0	0	0	2	0
7	1	1	1	2	2	2	0	0	0	2	2
8	1	2	0	1	2	0	1	2	0	2	1
9	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
10	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1
11	1	2	0	2	1	0	0	0	0	1	2
12	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Table 8. mod3 で周期が 1 となる

$n \diagdown x^k$	x^0
1	1
2	1
3	1

Table 9. mod3 で周期が 3 となる

$n \diagdown x^k$	x	x^2
1	1	1
2	2	0
3	0	0
4	1	1
5	2	0
6	0	0

Table 10. mod3 で周期が 9 となる

$n \diagdown x^k$	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
1	0	0	0	0	0	0
2	2	1	0	0	0	0
3	1	0	0	1	0	0
4	1	1	1	1	1	1
5	0	0	0	0	0	0
6	2	0	0	0	0	0
7	2	2	2	0	0	0
8	1	2	0	1	2	0
9	0	0	0	0	0	0

kを固定して${}_n\Gamma_k \mod 3$の周期を見ると、$(1, 3, 3, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 27, 27, \cdots)$という群数列になっている。

$k=1$のときの周期3を初項とすると、その項数は$(2, 6, 18, \cdots)$と変化しており、これは初項2、公比3の等比数列である。

[予想]

$3^{m-1} \leq k \leq 3^m - 1$のとき、${}_n\Gamma_k \mod 3$の周期は$3^m$となる。