$\dfrac{1}{5p}$ を2進展開したときの循環節の3分割和

学習院大学理学部数学科
06-043-035
武居 佳奈子

◊目的◊

$\frac{1}{5p}(7 \leq p \leq 1000,$ 奇素数$)$ を小数に2進展開したものを考える。循環節の長さが3の倍数$3m$のとき、循環節をリストで

$$[q_1, q_2, \cdots, q_{3m}]$$

と表示する。それを

$$[q_1, q_2, \cdots, q_m][q_{m+1}, q_{m+2}, \cdots, q_{2m}][q_{2m+1}, q_{2m+2}, \cdots, q_{3m}]$$

のように3等分し、3分割和をつくる。
pの値によって3分割和がどのようになるか研究を行った。

例 1. $\frac{1}{35}$ ($\frac{1}{5p}$ の $p=7$ の場合)を小数に2進展開したときの循環節の3分割和

循環節は $[0,0,0,0,0,1,1,1,0,1,0,1]$ 長さは12

3等分すると

$$[0,0,0,0]\ ,\ [0,1,1,1]\ ,\ [0,1,0,1]$$

これらを2進法で繰り上がりも考えて足すと

$$\begin{array}{r} [0,0,0,0] \\ [0,1,1,1] \\ +\ [0,1,0,1] \\ \hline [1,1,0,0] \end{array}$$

よって $\frac{1}{35}$ を2進展開したときの循環節の3分割和は

$$[1,1,0,0]$$

◊結果◊

表より、$\dfrac{1}{5p}$の2進展開での循環節の3分割和には8つのパターンが存在する。

①$\mathbf{1,1,0,0},1,1,0,0,\cdots 1,1,0,0,\mathbf{1,1,0,0}$
②$\mathbf{1,0,0},1,1,0,0,\cdots 1,1,0,0,\mathbf{1,0}$
③$\mathbf{1,1,0,0},1,1,0,0,\cdots 1,1,0,0,\mathbf{1,1,0}$
④$\mathbf{1,1,0,0},1,1,0,0,\cdots 1,1,0,0,\mathbf{0}$
⑤$\mathbf{1,0},1,1,0,0,\cdots 1,1,0,0,\mathbf{1,0,1}$
⑥$\mathbf{1,1,0,0},1,1,0,0,\cdots 1,1,0,0,\mathbf{1,1}$
⑦$\mathbf{1,0,0},1,1,0,0,\cdots 1,1,0,0,\mathbf{1}$
⑧$\mathbf{1},1,1,0,0,\cdots 1,1,0,0,\mathbf{1,0,1,1}$

$\Diamond$考察$\Diamond$

定理 1. ($\dfrac{1}{5p}$の2進展開したときの循環節の3分割和)
$\dfrac{1}{5p}(7 \leq p \leq 1000,$奇素数$)$を小数に2進展開したとき、循環節の長さが3の倍数であれば3分割和をZと置くと

$$Z = 3(16^{l-1} + 16^{l-2} + \cdots + 1)k_0$$

lは$\dfrac{1}{5p}$の循環節の長さの$\frac{1}{12}$

定理 2. (k_0 の値)
k_0 の値は、

$$p \equiv 1 \mod 10 \Rightarrow k_0 = 3\ [1,0,0,1,1,0,0,\cdots,1]\ ⑦$$
$$k_0 = 8\ [1,1,0,0,\cdots,0]\ ④$$

$$p \equiv 3 \mod 10 \Rightarrow k_0 = 1\ [1,1,0,0,\cdots,1,1]\ ⑥$$
$$k_0 = 6\ [1,0,0,1,1,0,0,\cdots,1,0]\ ②$$

$$p \equiv 7 \mod 10 \Rightarrow k_0 = 4\ [1,1,0,0,\cdots,1,1,0,0]\ ①$$
$$k_0 = 9\ [1,1,1,0,0,\cdots,1,01,1]\ ⑧$$

$$p \equiv 9 \mod 10 \Rightarrow k_0 = 2\ [1,1,0,0,\cdots,1,1,0]\ ③$$
$$k_0 = 7\ [1,0,1,1,0,0,\cdots,1,0,1]\ ⑤$$

定理1の証明

2と$5p$は互いに素なので、循環節の周期uは$\bmod 5p$での2の位数と同じ。uは3の倍数なので$u=3m$とすると、

$$2^{3m} \equiv 1 \mod 5p$$

5とpは互いに素なので、

$$\begin{cases} 2^{3m} \equiv 1 \mod 5 \\ 2^{3m} \equiv 1 \mod p \end{cases}$$

$2^{3m} \equiv 1 \mod 5$よりmは4の倍数

(1)
$$2^m \equiv 1 \mod 5$$

$2^{3m} \equiv 1 \mod p$より$2^m = x$とすると

(2)
$$1 + x + x^2 \equiv 0 \mod p$$

$1 < 5p$, 1と$5p$は互いに素、余りをr、商をqとすると

$$\begin{cases} 2r_j = 5pq_{j+1} + r_{j+1} \\ 2r_{j+m} = 5pq_{j+m+1} + r_{j+m+1} \\ 2r_{j+2m} = 5pq_{j+2m+1} + r_{j+2m+1} \end{cases}$$

この３つの式を足し、

$$R_j = r_j + r_{j+m} + r_{j+2m} \text{ , } Q_j = q_j + q_{j+m} + q_{j+2m}$$

とすると、$j = 0, 1, 2, \cdots$ について、

$$2R_0 = 5pQ_1 + R_1$$

$$2R_1 = 5pQ_2 + R_2$$

$$\vdots$$

$$2R_{m-1} = 5pQ_m + R_0$$

$2^{m-1}, 2^{m-2}, \cdots$ をかけていき両辺同士を足すと

$$(2^m - 1)R_0 = 5p(Q_1 2^{m-1} + Q_2 2^{m-2} + \cdots + Q_m)$$

$2^{m-1}Q_1 + 2^{m-2}Q_2 + \cdots + Q_m$ は3分割和になっているので
Z とおくと、

$$(2^m - 1)R_0 = 5pZ$$

式(2)より $1 + x + x^2 = kp$ とかくと、$r_j \equiv 2^j \mod 5p$ より

$$R_0 = r_0 + r_m + r_{2m} = k_0 p$$

また、$m = 4l$ なので等比級数の和の公式より、

$$2^m - 1 = 16^l - 1 = (16 - 1)(16^{l-1} + \cdots + 1) = 15(16^{l-1} + \cdots + 1)$$

よって、

$$Z = 3(16^{l-1} + 16^{l-2} + \cdots + 1)k_0$$

以上より証明できた。

定理2の証明

$1 + r_m + r_{2m} = k_0 p$ および余りの性質から、

$$k_0 p = r_0 + r_m + r_{2m} \leq 1 + (5p - 1) + (5p - 1) = 10p - 1$$

$$k_0 < 10 \tag{3}$$

一方、 $k_0 p = r_0 + r_m + r_{2m} \equiv 1 + 2^m + 2^{2m} \mod 5p$

式(1)より

$$k_0 p \equiv 3 \mod 5 \tag{4}$$

式(3)式(4)を満たすk_0とpを求めるため以下の4つに場合分けをする。

$$p \equiv 1 \mod 5$$
$$p \equiv 2 \mod 5$$
$$p \equiv 3 \mod 5$$
$$p \equiv 4 \mod 5$$

(1) $p \equiv 1 \mod 5$ のとき

$p \equiv 1 \mod 5$ なので $k_0 \equiv 3 \mod 5$ になる。$k_0 < 10$ より、

$$k_0 = 3, 8$$

p は奇数なので $p = 2a + 1$ とおくと、

$$2a + 1 \equiv 1 \mod 5$$
$$2a \equiv 0 \mod 5$$
$$a \equiv 0 \mod 5$$

$a = 5b$ として $p = 2a + 1$ に代入すると、$p = 10b + 1$
以上のことをまとめると、

$$p \equiv 1 \mod 10 \text{ のとき、} k_0 = 3, 8$$

$k_0 = 3$ のとき Z は $[1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, \cdots, 1, 1, 0, 0, 1]$
$k_0 = 8$ のとき Z は $[1, 1, 0, 0, \cdots, 1, 1, 0, 0, 0]$

以後同様の計算する。

$\underline{(2)\, p \equiv 2 \mod 5 のとき}$

$$p \equiv 7 \mod 10 のとき、k_0 = 4, 9$$

$k_0 = 4 のとき Z は [1, 1, 0, 0, \cdots, 1, 1, 0, 0]$

$k_0 = 9 のとき Z は [1, 1, 1, 0, 0, \cdots, 1, 1, 0, 0, 1, 01, 1]$

$\underline{(3)\, p \equiv 3 \mod 5 のとき}$

$$p \equiv 3 \mod 10 のとき、k_0 = 1, 6$$

$k_0 = 1 のとき Z は [1, 1, 0, 0, \cdots, 1, 1, 0, 0, 1, 1]$

$k_0 = 6 のとき Z は [1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, \cdots, 1, 1, 0, 0, 1, 0]$

$\underline{(4)\, p \equiv 4 \mod 5 のとき}$

$$p \equiv 9 \mod 10 のとき、k_0 = 2, 7$$

$k_0 = 2 のとき Z は [1, 1, 0, 0, \cdots, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 0]$

$k_0 = 7 のとき Z は [1, 0, 1, 1, 0, 0, \cdots, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 1]$

以上より、証明できた。

例 2. $l=3, k_0=4$のとき

$$Z=3(16^{3-1}+16^{3-2}+1)\times 4=12(16^2+16+1)$$

$16=10000_2$より

$$16^2+16+1=100010001_2$$

また、$12=1100_2$なので

$$\begin{array}{r}
100010001 \\
\times \qquad\qquad 1100 \\
\hline
10001000100 \\
100010001 \\
\hline
110011001100
\end{array}$$

よって、

$$Z=[110011001100]$$

これは$1,1,0,0$が並ぶ①のパターンである。