

# $\tilde{Z}, Z^*$ 方程式の研究

学習院大学理学部数学科 4 年

田中信也

## 定義

定義 1.

$\tilde{Z}$ ,  $Z^*$  方程式とは以下のものである. :

$$\tilde{Z} = \sum_{j=2}^n (n-j)jx_j$$

$$Z^* = \sum_{j=2}^{n-1} (n-j)(j-1)x_j$$

但し、 $x_j \in \{0\} \cup \mathbb{N}$

そこで、 $N_0 = \{0\} \cup N$ 、 $n \geq 3$ として

$$n \text{ が偶数の時 } \tilde{\mathcal{Z}}_n = \left\{ \sum_{j=2}^n (n-j)jx_j \mid x_j \in N_0 \right\}$$

$$n \text{ が奇数の時 } \tilde{\mathcal{Z}}_n = \left\{ \sum_{j=2}^n (n-j)jx_j/2 \mid x_j \in N_0 \right\}$$

$$n \text{ が偶数の時 } \mathcal{Z}^*_n = \left\{ \sum_{j=2}^{n-1} (n-j)(j-1)x_j/2 \mid x_j \in N_0 \right\}$$

$$n \text{ が奇数の時 } \mathcal{Z}^*_n = \left\{ \sum_{j=2}^{n-1} (n-j)(j-1)x_j \mid x_j \in N_0 \right\}$$

と定義する。

更に、 $\tilde{Z}$  方程式の値の補集合を、

$$\tilde{U}_n = N_0 \setminus \tilde{Z}_n$$

$Z^*$  方程式の値の補集合を、

$$U_n^* = N_0 \setminus Z_n^*$$

と定義する。

## 問題の由来

2つの  $\tilde{Z}$ ,  $Z^*$  方程式は平面代数曲線の双有理不変量の研究の中で飯高教授により新しく導入された。

### 例 1

$n = 4$  の時

$$\begin{aligned}\tilde{Z} &= \sum_{j=2}^4 (4-j)jx_j/2 \\ &= 2 \cdot 2x_2 + 1 \cdot 3x_3 \\ &= 3x + 4y \quad (x_2 \stackrel{put}{=} y, x_3 \stackrel{put}{=} x \quad x, y \in N_0)\end{aligned}$$

となるから、

$$\tilde{Z}_4 = \{0, 3, 4, 6, 7, 8, 9, \dots\}$$

この時の補集合は、

$$\tilde{U}_4 = N_0 \setminus \tilde{Z}_4 = \{1, 2, 5\}$$

であり、基数は3個、最大値は5である。

**例2**

$n = 5$ の時

$$\tilde{Z} = \sum_{j=2}^5 (5-j)jx_j/2$$

$$= (3 \cdot 2x_2 + 2 \cdot 3x_3 + 1 \cdot 4x_4)/2$$

$$= 3x_2 + 3x_3 + 2x_4$$

$$= 2x_4 + 3(x_2 + x_3)$$

$$= 2x + 3y \quad (x_4 \stackrel{put}{=} x, x_2 + x_3 \stackrel{put}{=} y \quad x, y \in N_0)$$

となるから、

$$\tilde{\mathcal{Z}}_5 = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$$

この時の補集合は、

$$\tilde{U}_5 = N_0 \setminus \tilde{\mathcal{Z}}_5 = \{1\}$$

であり、基数は1個、最大値は1である。

## 目的

二つの方程式

$\tilde{Z}$ ,  $Z^*$

についての考察をおこなう.

Prolog を用いて計算し, グラフを描いて  
 $\tilde{Z}$ ,  $Z^*$  方程式の関連性及び  $\tilde{Z}$ ,  $Z^*$  方程式の値の補集合の関係を調べる.

## 検証

Prologを利用して、 $\tilde{U}_n, U_n^*$ とその基数、最大値を計算させ、 $x$ 座標を $n$ 、 $y$ 座標を基数の値として、グラフを描かせる。

FIGURE 1.  $\tilde{U}_o$  のグラフ

FIGURE 2.  $\tilde{U}_e$  のグラフ

FIGURE 3.  $U_o^*$  のグラフ

FIGURE 4.  $U_e^*$  のグラフ

$n$ ; 奇数における  $\tilde{U}_n$  の基数とその最大値の表

$n$	$\#\tilde{U}_n$	Max
3	0	0
5	1	1
7	4	7
9	5	6
11	10	16
13	14	25
15	19	37
17	21	28
19	31	55
21	33	51
23	41	69
25	46	76
27	52	79

$n$	$\#\tilde{U}_n$	Max
29	60	86
31	68	106
33	72	114
35	82	139
37	91	148
39	97	157
41	108	181
43	118	191
45	122	201
47	132	211
49	142	221
51	150	231
53	159	237

$n$	$\#\tilde{U}_n$	Max
55	173	298
57	181	310
59	187	271
61	197	304
63	209	346
65	219	358
67	232	370
69	242	382
71	257	457
73	266	433
75	278	485
77	288	499
79	300	513

$n$	$\#\tilde{U}_n$	Max
81	308	527
83	324	541
85	339	589
87	349	604
89	364	619
91	376	634
93	385	649
95	397	664
97	410	679
99	424	694
101	435	706

$n$ ; 偶数における  $\tilde{U}_n$  の基数とその最大値の表

$n$	$\#\tilde{U}_n$	Max
4	3	5
6	8	12
8	15	25
10	27	47
12	34	61
14	45	68
16	59	89
18	72	108
20	86	143
22	106	172
24	115	192
26	137	212
28	157	272

$n$	$\#\tilde{U}_n$	Max
30	171	252
32	191	320
34	214	332
36	236	369
38	260	452
40	279	441
42	300	508
44	325	536
46	351	548
48	367	545
50	399	653
52	425	716
54	451	748

$n$	$\#\tilde{U}_n$	Max
56	482	772
58	509	863
60	529	844
62	559	931
64	592	965
66	623	1044

$n$ ; 奇数における  $U_n^*$  の基数とその最大値の表

$n$	$\#U_n^*$	Max
3	3	5
5	8	12
7	15	25
9	27	47
11	34	61
13	45	68
15	59	89
17	72	108
19	86	143
21	106	172
23	115	192
25	137	212
27	157	272

$n$	$\#U_n^*$	Max
29	171	252
31	191	320
33	214	332
35	236	369
37	260	452
39	279	441
41	300	508
43	325	536
45	351	548
47	367	545
49	399	653
51	425	716
53	451	748

$n$	$\#U_n^*$	Max
55	482	772
57	509	863
59	529	844
61	559	931
63	592	965
65	623	1044

$n$ ; 偶数における  $U_n^*$  の基数とその最大値の表

$n$	$\#U_n^*$	Max
4	0	0
6	1	1
8	4	7
10	5	6
12	10	16
14	14	25
16	19	37
18	21	28
20	31	55
22	33	51
24	41	69
26	46	76
28	52	79

$n$	$\#U_n^*$	Max
30	60	86
32	68	106
34	72	114
36	82	139
38	91	148
40	97	157
42	108	181
44	118	191
46	122	201
48	132	211
50	142	221
52	150	231
54	159	237

$n$	$\#U_n^*$	Max
56	173	298
58	181	310
60	187	271
62	197	304
64	209	346
66	219	358
68	232	370
70	242	382
72	257	457
74	266	433
76	278	485
78	288	499
80	300	513

$n$	$\#U_n^*$	Max
82	308	527
84	324	541
86	339	589
88	349	604
90	364	619
92	376	634
94	385	649
96	397	664
98	410	679
100	424	694
102	435	706

## 考察

### 命題1

$$\tilde{Z}_{n+1} = Z^*_n \quad (n \geq 3)$$

### 命題2

- $n$  が偶数の時、 $\tilde{Z}$ 方程式の値の最大公約数は1
- $n$  が奇数の時、 $\tilde{Z}$ 方程式の値の最大公約数は2
- $n$  が偶数の時、 $Z^*$ 方程式の値の最大公約数は2
- $n$  が奇数の時、 $Z^*$ 方程式の値の最大公約数は1

### 命題3

$\tilde{U}_n$  及び  $U_n^*$  は有限集合である。

## 予想

$$2\#\tilde{U}_n > \max \tilde{U}_n$$
$$2\#U_n^* > \max U_n^*$$

得られた表により、

第1式に関しては偶数の時  $n = 66$  の時まで、

奇数の時  $n = 101$  の時まで、

第2式に関しては偶数の時  $n = 102$  の時まで、

奇数の時  $n = 65$  の時まで、

確認される。