$2^{\pm n}\sqrt{2}$ の第 2 種連分数展開
Expansion of $2^{\pm n}\sqrt{2}$ in the continued fraction of the second kind

学習院大学 理学部 数学科
浅沼 亮介
by R.Asanuma

平成 24 年 2 月 2 日

目 次

1　目的

1.1　連分数とは

この研究では, 連分数を扱う. 連分数（continued fraction) とは, 分母にさらに分数が含まれているような分数のことを指す. 分子が全て 1 である場合, 正則連分数ということがある. 単に連分数といった場合, 正則連分数を指す場合が多い. 具体的には次のような形である.

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}}$$

$$(a_0 \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{Z})$$

1.2　第 2 種連分数展開について

実数 α の整数部分表すのにガウス記号と呼ばれる記号『$[\alpha]$』を用いることがある. 正確には, 整数 $[\alpha]$ は次の不等式を満たすものである.

$$[\alpha] \leq \alpha < [\alpha] + 1$$

その一方, 今回の研究を行う際に, 実数 α 以下の整数の中で最大のものを表す $\lfloor\alpha\rfloor$ と, 実数 α 以上の整数の中で最小のものを表す $\lceil\alpha\rceil$ を用いる.

すなわち,

$$\lfloor\alpha\rfloor \leq \alpha < \lfloor\alpha\rfloor + 1 \text{ , } \lceil\alpha\rceil - 1 < \alpha \leq \lceil\alpha\rceil$$

また, $\lfloor\alpha\rfloor$ を用いた連分数展開を第 1 種連分数展開, $\lceil\alpha\rceil$ を用いた連分数展開を第 2 種連分数展開とよぶことにする.

1.3　連分数展開の方法

無理数 α_0 の第二種連分数展開を説明する.

無理数 α_0 に対し $N_0 = \lceil \alpha_0 \rceil$ とおく.

$$\alpha_1 = \frac{1}{N_0 - \alpha_0} \quad , \quad N_1 = \lceil \alpha_1 \rceil ,$$
$$\alpha_2 = \frac{1}{N_1 - \alpha_1} \quad , \quad N_2 = \lceil \alpha_2 \rceil ,$$
$$\alpha_3 = \frac{1}{N_2 - \alpha_2} \quad , \quad \cdots\cdots\cdots \quad ,$$

すると

$$\alpha_0 = N_0 - \cfrac{1}{N_1 - \cfrac{1}{N_2 - \cfrac{1}{\vdots}}}$$

のように無限に続く分数でかける.

これを α_0 の第二種連分数展開という.

α_0 が二次無理数のとき数列 $N_0, N_1, N_2, N_3, \ldots$ は必ずあるところから, 繰り返しがおきることが知られている. 繰り返す部分を循環節といい, その長さを周期という. 繰り返しにいくまでのところをひげという.

この研究では, $2^{\pm n}\sqrt{2}$ を中心に $\alpha_k = \dfrac{A_k\sqrt{2} + B_k}{C_k}(A_k, B_k, C_k \in \mathbb{Z})$ の形を用いて第 2 種連分数展開を行った.

そして, そのときの周期や循環節, $[A_k, B_k, C_k]$ について調べた.

2 方法

2.1 プログラム

```
/*切り上げ部分を作るプログラム*/
seisu1([A,B,C],M,N):- Y is (A*sqrt(M)+B)/C,
                N is ceiling(Y).


/*3 つ最大公約数を求めるプログラム*/
gcd(A=[A,0]):-!.
gcd(D=[A,B]):- A1 is abs(A),
         B1 is abs(B),
         res_q(A1=B1*_+R),
         gcd(D=[B1,R]).

gcd3(DD=[A,B,C]):-  C1 is abs(C),
            gcd(D=[A,B]),
            gcd(DD=[D,C1]).

res_q(A=B*Q+R):- Q is ceiling(A/B),R is A-B*Q.


/*連分数展開を繰り返すプログラム*/
hiku([A1,B1,C]=N-[A,B,C]):- B1 is N*C-B,
                    A1 is -A.
gyaku([A1,B1,C1]=1/[A,B,C],M):- A1 is C*A,
                        B1 is -C*B,
        C1 is A*A*M-B*B.

tugi([A,B,C],[A2,B2,C2],M,N):- seisu1([A,B,C],M,N),
     hiku([A1,B1,C1]=N-[A,B,C]),
     gyaku([A0,B0,C0]=1/[A1,B1,C1],M),
     gcd3(DD=[A0,B0,C0]),
     A2 is A0//(-DD),
     B2 is B0//(-DD),
     C2 is C0//(-DD).



kurikaeshi(L,M,C,J):- C1 is C+1, C1=<J,
            tugi(L,L2,M,N),
    write([C,L,N]),nl,
```

```
    kurikaeshi(L2,M,C1,J).
kurikaeshi(L,M,C,J).

:-dynamic ts/1.
ts([0,0,0]).
sagasu(L,M,C,J):- tugi(L,L2,M,Q),
                write(C=L),put(9),
                write(Q),nl,
                C1 is C+1,C1=<J,
(\+ts(L2)->(asserta(ts(L2)),sagasu(L2,M,C1,J));write(C1=L2)).
sagasu0(L,M,C,J):- abolish(ts/1),
         asserta(ts(L)),
 sagasu(L,M,C,J).

for(I =<J,I):- I=<J.
for(I =<J,K):- I=<J,
       I1 is I+1,for(I1=<J,K).
```

3　結果

2.1 のプログラムより,$2^n\sqrt{2}$ と $\dfrac{\sqrt{2}}{2^n}$ の第二種連分数展開の結果を表にまとめた.
また,$n\sqrt{2}$ と $\dfrac{\sqrt{2}}{n}$ の結果も参考にするためにまとめる.

3.1　表の見方

表 1: 例

	$8\sqrt{2}$	
ひげ	1	
周期	6	
K	[A,B,C]	N
0	[8,0,1]	12
1	[2,3,4]	2
2	[8,20,17]	2
3	[4,7,2]	7
4	[8,14,17]	2
5	[2,5,4]	2
6	[8,12,1]	24

まず表の見方を説明する.
1.3 で述べたように, 今回 $\alpha_k = \dfrac{A_k\sqrt{2}+B_k}{C_k}$ の形を用いて連分数展開を行っている. ここでは,
[A,B,C]=[8,0,1] としたときの表の見方を説明する.

$A = 8, B = 0, C = 1$ とすると,
$\alpha_0 = 8\sqrt{2}$　,　$N_0 = \lceil \alpha_0 \rceil = 12$ となる.
つまり表 1 の 5 行目の $0, [8, 0, 1], 12$ は, このときの $K, [A, B, C], N_0$ を示す.

以下, 第 2 種連分数展開の定義に従って
$\alpha_1 = \dfrac{1}{N_0 - \alpha_0} = \dfrac{2\sqrt{2}+3}{4}$　,　$N_1 = \lceil \alpha_0 \rceil = 2$ となるので,
表 1 の 6 行目の $1, [2, 3, 4], 2$ はこのときの $K, [A, B, C], N_1$ を示す.

$\alpha_2 = \dfrac{1}{N_1 - \alpha_1} = \dfrac{8\sqrt{2}}{+}2017$　,　$N_2 = \lceil \alpha_1 \rceil = 2$ となるので,
表 1 の 7 行目の $2, [88, 20, 17], 2$ はこのときの $K, [A, B, C], N_2$ を示す.

$$\alpha_3 = \frac{1}{N_2 - \alpha_2} = \frac{4\sqrt{2}+7}{2} \quad , \quad N_3 = \lceil \alpha_2 \rceil = 7 \text{ となるので,}$$

表 1 の 8 行目の $3, [4, 7, 3], 7$ はこのときの $K, [A, B, C], N_3$ を示す.

$$\alpha_4 = \frac{1}{N_3 - \alpha_3} = \frac{8\sqrt{2}+14}{17} \quad , \quad N_4 = \lceil \alpha_3 \rceil = 2 \text{ となるので,}$$

表 1 の 9 行目の $4, [8, 14, 17], 2$ はこのときの $K, [A, B, C], N_4$ を示す.

$$\alpha_5 = \frac{1}{N_4 - \alpha_4} = \frac{2\sqrt{2}+5}{4} \quad , \quad N_5 = \lceil \alpha_4 \rceil = 2 \text{ となるので,}$$

表 1 の 10 行目の $5, [2, 5, 4], 2$ はこのときの $K, [A, B, C], N_5$ を示す.

$$\alpha_6 = \frac{1}{N_5 - \alpha_5} = 8\sqrt{2}+12 \quad , \quad N_6 = \lceil \alpha_5 \rceil = 24 \text{ となるので,}$$

表 1 の 11 行目の $6, [8, 12, 1], 24$ はこのときの $K, [A, B, C], N_6$ を示す.

$$\alpha_7 = \frac{1}{N_6 - \alpha_6} = \frac{2\sqrt{2}+3}{4} = \alpha_1 \text{ となる.}$$

したがって, $12, 2, 2, 7, 2, 2, 24, 2.2, 7, 2, 2, 24, \cdots$ となり, 以下 2,2,7,2,2,24 が循環する.
$A = 8, B = 0, C = 1$ としたときの, 第二種連分数展開は $[12, \overline{2, 2, 7, 2, 2, 24}]$ となって, ひげの長さは 1, 周期は 6 となる.

$$8\sqrt{2} = 12 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{7 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{24 - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{\vdots}}}}}}}}$$

3.2 $2^n\sqrt{2}$ の場合

表 2: $2^n\sqrt{2}$ の連分数展開（$n = 0 \sim 2$）

	$\sqrt{2}$		$2\sqrt{2}$		$4\sqrt{2}$	
ひげ	1		1		1	
周期	2		1		2	
K	[A,B,C]	N	[A,B,C]	N	[A,B,C]	N
0	[1,0,1]	2	[2,0,1]	3	[4,0,1]	6
1	**[1,2,2]**	**2**	[2,3,1]	6	**[2,3,2]**	**3**
2	[1,2,1]	4			[4,6,1]	12

表 3: $2^n\sqrt{2}$ の連分数展開（$n = 3 \sim 5$）

	$8\sqrt{2}$		$16\sqrt{2}$		$32\sqrt{2}$	
ひげ	1		1		1	
周期	6		16		42	
K	[A,B,C]	N	[A,B,C]	N	[A,B,C]	N
0	[8,0,1]	12	[16,0,1]	23	[32,0,1]	46
1	[2,3,4]	2	[16,23,17]	3	[16,23,34]	2
2	[8,20,17]	2	[4,7,4]	4	[32,90,89]	2
3	**[4,7,2]**	**7**	[16,36,49]	2	[4,11,8]	3
4	[8,14,17]	2	[8,31,34]	2	[32,104,137]	2
5	[2,5,4]	2	[16,74,73]	2	[16,85,98]	2
6	[8,12,1]	24	[2,9,8]	2	[32,222,241]	2
7			[16,56,41]	2	[8,65,68]	2
8			**[8,13,2]**	**13**	[32,284,289]	2
9			[16,26,41]	2	[16,147,146]	2
10			[2,7,8]	2	[32,290,281]	2
11			[16,72,73]	2	[2,17,16]	2
12			[8,37,34]	2	[32,240,217]	2
13			[16,62,49]	2	[16,97,82]	2
14			[4,9,4]	4	[32,134,97]	2
15			[16,28,17]	3	[8,15,4]	7
16			[16,23,1]	46	[32,52,41]	3
17					[32,71,73]	2
18					[32,75,49]	3
19					[4,9,8]	2
20					[32,56,17]	6
21					**[16,23,2]**	**23**

continued on next page

continued from previous page

22			[32,46,17]	6
23			[4,7,8]	2
24			[32,72,49]	3
25			[32,75,73]	2
26			[32,71,41]	3
27			[8,13,4]	7
28			[32,60,97]	2
29			[16,67,82]	2
30			[32,194,217]	2
31			[2,15,16]	2
32			[32,272,281]	2
33			[16,145,146]	2
34			[32,294,289]	2
35			[8,71,68]	2
36			[32,260,241]	2
37			[16,111,98]	2
38			[32,170,137]	2
39			[4,13,8]	3
40			[32,88,89]	2
41			[16,45,34]	2
42			[32,46,1]	92

3.3 $\frac{\sqrt{2}}{2^n}$ の場合

表 4: $\frac{\sqrt{2}}{2^n}$ の連分数展開（$n=1\sim3$）

	$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{4}$		$\frac{\sqrt{2}}{8}$	
ひげ	1		1		1	
周期	2		4		11	
K	[A,B,C]	N	[A,B,C]	N	[A,B,C]	N
0	[1,0,2]	1	[1,0,4]	1	[1,0,8]	1
1	**[1,2,1]**	4	[2,8,7]	2	[4,32,31]	2
2	[1,2,2]	2	**[1,3,2]**	**3**	[2,15,14]	2
3			[2,6,7]	2	[4,26,23]	2
4			[1,4,4]	2	[1,5,4]	2
5					**[4,12,7]**	**3**
6					**[4,9,7]**	**3**
7					[1,3,4]	2
8					[4,20,23]	2
9					[2,13,14]	2
10					[4,30,31]	2
11					[1,8,8]	2

表 5: $\frac{\sqrt{2}}{2^n}$ の連分数展開（$n=4\sim5$）

	$\frac{\sqrt{2}}{16}$		$\frac{\sqrt{2}}{32}$	
ひげ	1		1	
周期	27		61	
K	[A,B,C]	N	[A,B,C]	N
0	[1,0,16]	1	[1,0,32]	1
1	[8,128,127]	2	[16,512,511]	2
2	[4,63,62]	2	[8,255,254]	2
3	[8,122,119]	2	[16,506,503]	2
4	[2,29,28]	2	[4,125,124]	2
5	[8,108,103]	2	[16,492,487]	2
6	[4,49,46]	2	[8,241,238]	2
7	[8,86,79]	2	[16,470,463]	2
8	[1,9,8]	2	[2,57,56]	2
9	[8,56,47]	2	[16,440,431]	2
10	[4,19,14]	2	[8,211,206]	2
11	[8,18,7]	5	[16,402,391]	2
12	[8,17,23]	2	[4,95,92]	2
13	**[8,29,31]**	**2**	[16,356,343]	2
14	**[8,33,31]**	**2**	[8,165,158]	2
15	[8,29,23]	2	[16,302,287]	2
16	[8,17,7]	5	[1,17,16]	2
17	[4,9,14]	2	[16,240,223]	2
18	[8,38,47]	2	[8,103,94]	2
19	[1,7,8]	2	[16,170,151]	2
20	[8,72,79]	2	[4,33,28]	2
21	[4,43,46]	2	[16,92,71]	2
22	[8,98,103]	2	[8,25,14]	3
23	[2,27,28]	2	[16,34,23]	3
24	[8,116,119]	2	[16,35,31]	2
25	[4,61,62]	2	[16,27,7]	8
26	[8,126,127]	2	[16,29,47]	2
27	[1,16,16]	2	[16,65,79]	2
28			[16,93,103]	2
29			[16,113,119]	2
30			**[16,125,127]**	**2**
31			**[16,129,127]**	**2**
32			[16,125,119]	2
33			[16,113,103]	2
34			[16,93,79]	2

continued on next page

continued from previous page

35		[16,65,47]	2
36		[16,29,7]	8
37		[16,27,31]	2
38		[16,35,23]	3
39		[8,17,14]	3
40		[16,50,71]	2
41		[4,23,28]	2
42		[16,132,151]	2
43		[8,85,94]	2
44		[16,206,223]	2
45		[1,15,16]	2
46		[16,272,287]	2
47		[8,151,158]	2
48		[16,330,343]	2
49		[4,89,92]	2
50		[16,380,391]	2
51		[8,201,206]	2
52		[16,422,431]	2
53		[2,55,56]	2
54		[16,456,463]	2
55		[8,235,238]	2
56		[16,482,487]	2
57		[4,123,124]	2
58		[16,500,503]	2
59		[8,253,254]	2
60		[16,510,511]	2
61		[1,32,32]	2

3.4 参考結果

3.4.1 $n\sqrt{2}$ の場合

表 6: $n\sqrt{2}$ の連分数展開（$n = 3 \sim 6$）

	$3\sqrt{2}$		$4\sqrt{2}$		$5\sqrt{2}$		$6\sqrt{2}$	
ひげ	1		1		1		1	
周期	4		2		14		2	
K	[A,B,C]	N	[A,B,C]	N	[A,B,C]	N	[A,B,C]	N
0	[3,0,1]	5	[4,0,1]	6	[5,0,1]	8	[6,0,1]	9
1	[3,5,7]	2	[2,3,2]	3	[5,8,14]	2	**[2,3,3]**	**2**
2	**[1,3,3]**	**2**	[4,6,1]	12	[1,4,5]	2	[6,9,1]	18
3	[3,9,7]	2			[5,30,34]	2		
4	[3,5,1]	10			[5,38,41]	2		
5					[5,44,46]	2		
6					[5,48,49]	2		
7					**[1,10,10]**	**2**		
8					[5,50,49]	2		
9					[5,48,46]	2		
10					[5,44,41]	2		
11					[5,38,34]	2		
12					[1,6,5]	2		
13					[5,20,14]	2		
14					[5,8,1]	16		

表 7: $n\sqrt{2}$ の連分数展開（$n = 7 \sim 10$）

	$7\sqrt{2}$		$8\sqrt{2}$		$9\sqrt{2}$		$10\sqrt{2}$	
ひげ	1		1		1		1	
周期	2		6		16		7	
K	[A,B,C]	N	[A,B,C]	N	[A,B,C]	N	[A,B,C]	N
0	[7,0,1]	10	[8,0,1]	12	[9,0,1]	13	[10,0,1]	15
1	**[7,10,2]**	**10**	[2,3,4]	2	[9,13,7]	4	[2,3,5]	2
2	[7,10,1]	20	[8,20,17]	2	[3,5,3]	4	[10,35,41]	2
3			**[4,7,2]**	**7**	[9,21,31]	2	**[10,47,49]**	**2**
4			[8,14,17]	2	[9,41,49]	2	**[10,51,49]**	**2**
5			[2,5,4]	2	[3,19,21]	2	[10,47,41]	2
6			[8,12,1]	24	[9,69,73]	2	[2,7,5]	2
7					[9,77,79]	2	[10,15,1]	30
8					**[1,9,9]**	**2**		
9					[9,81,79]	2		
10					[9,77,73]	2		
11					[3,23,21]	2		
12					[9,57,49]	2		
13					[9,41,31]	2		
14					[3,7,3]	4		
15					[9,15,7]	4		
16					[9,13,1]	26		

表 8: $n\sqrt{2}$ の連分数展開（$n = 11 \sim 14$）

	$11\sqrt{2}$		$12\sqrt{2}$		$13\sqrt{2}$		$14\sqrt{2}$	
ひげ	1		1		1		1	
周期	22		1		42		2	
K	[A,B,C]	N	[A,B,C]	N	[A,B,C]	N	[A,B,C]	N
0	[11,0,1]	16	[12,0,1]	17	[13,0,1]	19	[14,0,1]	20
1	[11,16,14]	3	[12,17,1]	34	[13,19,23]	2	**[7,10,4]**	**5**
2	[11,26,31]	2			[13,27,17]	3	[14,20,1]	40
3	[11,36,34]	2			[13,24,14]	4		
4	[11,32,23]	3			[13,32,49]	2		
5	[11,37,49]	2			[13,66,82]	2		
6	[11,61,71]	2			[13,98,113]	2		
7	[11,81,89]	2			[13,128,142]	2		
8	[11,97,103]	2			[1,12,13]	2		
9	[11,109,113]	2			[13,182,194]	2		
10	[11,117,119]	2			[13,206,217]	2		
11	**[1,11,11]**	**2**			[13,228,238]	2		
12	[11,121,119]	2			[13,248,257]	2		
13	[11,117,113]	2			[13,266,274]	2		
14	[11,109,103]	2			[13,282,289]	2		
15	[11,97,89]	2			[13,296,302]	2		
16	[11,81,71]	2			[13,308,313]	2		
17	[11,61,49]	2			[13,318,322]	2		
18	[11,37,23]	3			[13,326,329]	2		
19	[11,32,34]	2			[13,332,334]	2		
20	[11,36,31]	2			[13,336,337]	2		
21	[11,26,14]	3			**[1,26,26]**	**2**		
22	[11,16,1]	32			[13,338,337]	2		
23					[13,336,334]	2		
24					[13,332,329]	2		
25					[13,326,322]	2		
26					[13,318,313]	2		
27					[13,308,302]	2		
28					[13,296,289]	2		
29					[13,282,274]	2		
30					[13,266,257]	2		
31					[13,248,238]	2		
32					[13,228,217]	2		
33					[13,206,194]	2		
34					[1,14,13]	2		

continued on next page

continued from previous page

35			[13,156,142]	2	
36			[13,128,113]	2	
37			[13,98,82]	2	
38			[13,66,49]	2	
39			[13,32,14]	4	
40			[13,24,17]	3	
41			[13,27,23]	2	
42			[13,19,1]	38	

表 9: $n\sqrt{2}$ の連分数展開（$n = 15 \sim 17$）

	$15\sqrt{2}$		$16\sqrt{2}$		$17\sqrt{2}$	
ひげ	1		1		1	
周期	12		16		24	
K	[A,B,C]	N	[A,B,C]	N	[A,B,C]	N
0	[15,0,1]	22	[16,0,1]	23	[17,0,1]	25
1	[15,22,34]	2	[16,23,17]	3	[17,25,47]	2
2	[15,46,49]	2	[4,7,4]	4	[17,69,89]	2
3	[15,52,46]	2	[16,36,49]	2	[17,109,127]	2
4	[3,8,5]	3	[8,31,34]	2	[17,145,161]	2
5	[15,35,31]	2	[16,74,73]	2	[17,177,191]	2
6	**[5,9,3]**	**6**	[2,9,8]	2	[17,205,217]	2
7	[15,27,31]	2	[16,56,41]	2	[17,229,239]	2
8	[3,7,5]	3	**[8,13,2]**	**13**	[17,249,257]	2
9	[15,40,46]	2	[16,26,41]	2	[17,265,271]	2
10	[15,52,49]	2	[2,7,8]	2	[17,277,281]	2
11	[15,46,34]	2	[16,72,73]	2	[17,285,287]	2
12	[15,22,1]	44	[8,37,34]	2	**[1,17,17]**	**2**
13			[16,62,49]	2	[17,289,287]	2
14			[4,9,4]	4	[17,285,281]	2
15			[16,28,17]	3	[17,277,271]	2
16			[16,23,1]	46	[17,265,257]	2
17					[17,249,239]	2
18					[17,229,217]	2
19					[17,205,191]	2
20					[17,177,161]	2
21					[17,145,127]	2
22					[17,109,89]	2
23					[17,69,47]	2
24					[17,25,1]	50

表 10: $n\sqrt{2}$ の連分数展開（ $n = 18 \sim 20$)

ひげ	1		1		1	
周期	10		36		8	
K	[A,B,C]	N	[A,B,C]	N	[A,B,C]	N
0	[18,0,1]	26	[19,0,1]	27	[20,0,1]	29
1	[9,13,14]	2	[19,27,7]	8	[20,29,41]	2
2	[6,10,3]	7	[19,29,17]	4	[20,53,49]	2
3	[18,33,49]	2	[19,39,47]	2	[4,9,5]	3
4	[18,65,73]	2	[19,55,49]	2	**[10,15,2]**	**15**
5	**[2,9,9]**	**2**	[19,43,23]	4	[4,6,5]	3
6	[18,81,73]	2	[19,49,73]	2	[20,45,49]	2
7	[18,65,49]	2	[19,97,119]	2	[20,53,41]	2
8	[6,11,3]	7	[19,141,161]	2	[20,29,1]	58
9	[9,15,14]	2	[19,181,199]	2		
10	[18,26,1]	52	[19,217,233]	2		
11			[19,249,263]	2		
12			[19,277,289]	2		
13			[19,301,311]	2		
14			[19,321,329]	2		
15			[19,337,343]	2		
16			[19,349,353]	2		
17			[19,357,359]	2		
18			**[1,19,19]**	**2**		
19			[19,361,359]	2		
20			[19,357,353]	2		
21			[19,349,343]	2		
22			[19,337,329]	2		
23			[19,321,311]	2		
24			[19,301,289]	2		
25			[19,277,263]	2		
26			[19,249,233]	2		
27			[19,217,199]	2		
28			[19,181,161]	2		
29			[19,141,119]	2		
30			[19,97,73]	2		
31			[19,49,23]	4		
32			[19,43,49]	2		
33			[19,55,47]	2		
34			[19,39,17]	4		
35			[19,29,7]	8		
36			[19,27,1]	54		

3.4.2 $\frac{\sqrt{2}}{n}$ の場合

表 11: $\frac{\sqrt{2}}{n}$ の連分数展開（ $n = 3 \sim 6$)

	$\frac{\sqrt{2}}{3}$		$\frac{\sqrt{2}}{4}$		$\frac{\sqrt{2}}{5}$		$\frac{\sqrt{2}}{6}$	
ひげ	1		1		1		1	
周期	4		4		8		8	
K	[A,B,C]	N	[A,B,C]	N	[A,B,C]	N	[A,B,C]	N
0	[1,0,3]	1	[1,0,4]	1	[1,0,5]	1	[1,0,6]	1
1	[3,9,7]	2	[2,8,7]	2	[5,25,23]	2	[3,18,17]	2
2	**[3,5,1]**	**10**	**[1,3,2]**	**3**	[5,21,17]	2	[3,16,14]	2
3	[3,5,7]	2	[2,6,7]	2	[5,13,7]	3	[1,4,3]	2
4	[1,3,3]	2	[1,4,4]	2	**[5,8,2]**	**8**	**[3,6,2]**	**6**
5					[5,8,7]	3	[1,2,3]	2
6					[5,13,17]	2	[3,12,14]	2
7					[5,21,23]	2	[3,16,17]	2
8					[1,5,5]	2	[1,6,6]	2

表 12: $\frac{\sqrt{2}}{n}$ の連分数展開（$n = 7 \sim 10$）

	$\frac{\sqrt{2}}{7}$		$\frac{\sqrt{2}}{8}$		$\frac{\sqrt{2}}{9}$		$\frac{\sqrt{2}}{10}$	
ひげ	1		1		1		1	
周期	26		11		16		14	
K	[A,B,C]	N	[A,B,C]	N	[A,B,C]	N	[A,B,C]	N
0	[1,0,7]	1	[1,0,8]	1	[1,0,9]	1	[1,0,10]	1
1	[7,49,47]	2	[4,32,31]	2	[9,81,79]	2	[5,50,49]	2
2	[7,45,41]	2	[2,15,14]	2	[9,77,73]	2	[5,48,46]	2
3	[7,37,31]	2	[4,26,23]	2	[3,23,21]	2	[5,44,41]	2
4	[7,25,17]	3	[1,5,4]	2	[9,57,49]	2	[5,38,34]	2
5	[7,26,34]	2	**[4,12,7]**	**3**	[9,41,31]	2	[1,6,5]	2
6	[1,6,7]	2	**[4,9,7]**	**3**	[3,7,3]	4	[5,20,14]	2
7	[7,56,62]	2	[1,3,4]	2	[9,15,7]	4	**[5,8,1]**	**16**
8	[7,68,73]	2	[4,20,23]	2	**[9,13,1]**	**26**	[5,8,14]	2
9	[7,78,82]	2	[2,13,14]	2	[9,13,7]	4	[1,4,5]	2
10	[7,86,89]	2	[4,30,31]	2	[3,5,3]	4	[5,30,34]	2
11	[7,92,94]	2	[1,8,8]	2	[9,21,31]	2	[5,38,41]	2
12	[7,96,97]	2			[9,41,49]	2	[5,44,46]	2
13	**[1,14,14]**	**2**			[3,19,21]	2	[5,48,49]	2
14	[7,98,97]	2			[9,69,73]	2	[1,10,10]	2
15	[7,96,94]	2			[9,77,79]	2		
16	[7,92,89]	2			[1,9,9]	2		
17	[7,86,82]	2						
18	[7,78,73]	2						
19	[7,68,62]	2						
20	[1,8,7]	2						
21	[7,42,34]	2						
22	[7,26,17]	3						
23	[7,25,31]	2						
24	[7,37,41]	2						
25	[7,45,47]	2						
26	[1,7,7]	2						

表 13: $\frac{\sqrt{2}}{n}$ の連分数展開（$n = 11 \sim 14$）

	$\frac{\sqrt{2}}{11}$		$\frac{\sqrt{2}}{12}$		$\frac{\sqrt{2}}{13}$		$\frac{\sqrt{2}}{14}$	
ひげ	1		1		1		1	
周期	22		16		28		26	
K	[A,B,C]	N	[A,B,C]	N	[A,B,C]	N	[A,B,C]	N
0	[1,0,11]	1	[1,0,12]	1	[1,0,13]	1	[1,0,14]	1
1	[11,121,119]	2	[6,72,71]	2	[13,169,167]	2	[7,98,97]	2
2	[11,117,113]	2	[3,35,34]	2	[13,165,161]	2	[7,96,94]	2
3	[11,109,103]	2	[2,22,21]	2	[13,157,151]	2	[7,92,89]	2
4	[11,97,89]	2	[3,30,28]	2	[13,145,137]	2	[7,86,82]	2
5	[11,81,71]	2	[6,52,47]	2	[13,129,119]	2	[7,78,73]	2
6	[11,61,49]	2	[1,7,6]	2	[13,109,97]	2	[7,68,62]	2
7	[11,37,23]	3	[6,30,23]	2	[13,85,71]	2	[1,8,7]	2
8	[11,32,34]	2	**[3,8,4]**	**4**	[13,57,41]	2	[7,42,34]	2
9	[11,36,31]	2	[6,16,23]	2	[13,25,7]	7	[7,26,17]	3
10	[11,26,14]	3	[1,5,6]	2	[13,24,34]	2	[7,25,31]	2
11	**[11,16,1]**	**32**	[6,42,47]	2	[13,44,47]	2	[7,37,41]	2
12	[11,16,14]	3	[3,26,28]	2	[13,50,46]	2	[7,45,47]	2
13	[11,26,31]	2	[2,20,21]	2	[13,42,31]	2	**[1,7,7]**	**2**
14	[11,36,34]	2	[3,33,34]	2	**[13,20,2]**	**20**	[7,49,47]	2
15	[11,32,23]	3	[6,70,71]	2	[13,20,31]	2	[7,45,41]	2
16	[11,37,49]	2	[1,12,12]	2	[13,42,46]	2	[7,37,31]	2
17	[11,61,71]	2			[13,50,47]	2	[7,25,17]	3
18	[11,81,89]	2			[13,44,34]	2	[7,26,34]	2
19	[11,97,103]	2			[13,24,7]	7	[1,6,7]	2
20	[11,109,113]	2			[13,25,41]	2	[7,56,62]	2
21	[11,117,119]	2			[13,57,71]	2	[7,68,73]	2
22	[1,11,11]	2			[13,85,97]	2	[7,78,82]	2
23					[13,109,119]	2	[7,86,89]	2
24					[13,129,137]	2	[7,92,94]	2
25					[13,145,151]	2	[7,96,97]	2
26					[13,157,161]	2	[1,14,14]	2
27					[13,165,167]	2		
28					[1,13,13]	2		

表 14: $\frac{\sqrt{2}}{n}$ の連分数展開（$n = 15 \sim 17$）

	$\frac{\sqrt{2}}{15}$		$\frac{\sqrt{2}}{16}$		$\frac{\sqrt{2}}{17}$	
ひげ	1		1		1	
周期	26		27		24	
K	[A,B,C]	N	[A,B,C]	N	[A,B,C]	N
0	[1,0,15]	1	[1,0,16]	1	[1,0,17]	1
1	[15,225,223]	2	[8,128,127]	2	[17,289,287]	2
2	[15,221,217]	2	[4,63,62]	2	[17,285,281]	2
3	[5,71,69]	2	[8,122,119]	2	[17,277,271]	2
4	[15,201,193]	2	[2,29,28]	2	[17,265,257]	2
5	[3,37,35]	2	[8,108,103]	2	[17,249,239]	2
6	[5,55,51]	2	[4,49,46]	2	[17,229,217]	2
7	[15,141,127]	2	[8,86,79]	2	[17,205,191]	2
8	[15,113,97]	2	[1,9,8]	2	[17,177,161]	2
9	[5,27,21]	2	[8,56,47]	2	[17,145,127]	2
10	[3,9,5]	3	[4,19,14]	2	[17,109,89]	2
11	[5,10,6]	3	[8,18,7]	5	[17,69,47]	2
12	[15,24,7]	7	[8,17,23]	2	**[17,25,1]**	**50**
13	**[3,5,5]**	**2**	**[8,29,31]**	**2**	[17,25,47]	2
14	[15,25,7]	7	**[8,33,31]**	**2**	[17,69,89]	2
15	[5,8,6]	3	[8,29,23]	2	[17,109,127]	2
16	[3,6,5]	3	[8,17,7]	5	[17,145,161]	2
17	[5,15,21]	2	[4,9,14]	2	[17,177,191]	2
18	[15,81,97]	2	[8,38,47]	2	[17,205,217]	2
19	[15,113,127]	2	[1,7,8]	2	[17,229,239]	2
20	[5,47,51]	2	[8,72,79]	2	[17,249,257]	2
21	[3,33,35]	2	[4,43,46]	2	[17,265,271]	2
22	[15,185,193]	2	[8,98,103]	2	[17,277,281]	2
23	[5,67,69]	2	[2,27,28]	2	[17,285,287]	2
24	[15,213,217]	2	[8,116,119]	2	[1,17,17]	2
25	[15,221,223]	2	[4,61,62]	2		
26	[1,15,15]	2	[8,126,127]	2		
27			[1,16,16]	2		

表 15: $\frac{\sqrt{2}}{n}$ の連分数展開（$n = 18 \sim 20$）

	$\frac{\sqrt{2}}{18}$		$\frac{\sqrt{2}}{19}$		$\frac{\sqrt{2}}{20}$	
ひげ	1		1		1	
周期	32		36		28	
K	[A,B,C]	N	[A,B,C]	N	[A,B,C]	N
0	[1,0,18]	1	[1,0,19]	1	[1,0,20]	1
1	[9,162,161]	2	[19,361,359]	2	[10,200,199]	2
2	[9,160,158]	2	[19,357,353]	2	[5,99,98]	2
3	[3,52,51]	2	[19,349,343]	2	[10,194,191]	2
4	[9,150,146]	2	[19,337,329]	2	[5,94,92]	2
5	[9,142,137]	2	[19,321,311]	2	[2,36,35]	2
6	[3,44,42]	2	[19,301,289]	2	[5,85,82]	2
7	[9,120,113]	2	[19,277,263]	2	[10,158,151]	2
8	[9,106,98]	2	[19,249,233]	2	[5,72,68]	2
9	[1,10,9]	2	[19,217,199]	2	[10,128,119]	2
10	[9,72,62]	2	[19,181,161]	2	[1,11,10]	2
11	[9,52,41]	2	[19,141,119]	2	[10,90,79]	2
12	[3,10,6]	3	[19,97,73]	2	[5,34,28]	2
13	[9,24,23]	2	[19,49,23]	4	[10,44,31]	2
14	[9,22,14]	3	[19,43,49]	2	**[5,9,2]**	**9**
15	[9,20,17]	2	[19,55,47]	2	[10,18,31]	2
16	**[9,14,2]**	**14**	[19,39,17]	4	[5,22,28]	2
17	[9,14,17]	2	[19,29,7]	8	[10,68,79]	2
18	[9,20,14]	3	**[19,27,1]**	**54**	[1,9,10]	2
19	[9,22,23]	2	[19,27,7]	8	[10,110,119]	2
20	[3,8,6]	3	[19,29,17]	4	[5,64,68]	2
21	[9,30,41]	2	[19,39,47]	2	[10,144,151]	2
22	[9,52,62]	2	[19,55,49]	2	[5,79,82]	2
23	[1,8,9]	2	[19,43,23]	4	[2,34,35]	2
24	[9,90,98]	2	[19,49,73]	2	[5,90,92]	2
25	[9,106,113]	2	[19,97,119]	2	[10,188,191]	2
26	[3,40,42]	2	[19,141,161]	2	[5,97,98]	2
27	[9,132,137]	2	[19,181,199]	2	[10,198,199]	2
28	[9,142,146]	2	[19,217,233]	2	[1,20,20]	2
29	[3,50,51]	2	[19,249,263]	2		
30	[9,156,158]	2	[19,277,289]	2		
31	[9,160,161]	2	[19,301,311]	2		
32	[1,18,18]	2	[19,321,329]	2		
33			[19,337,343]	2		
34			[19,349,353]	2		
35			[19,357,359]	2		
36			[1,19,19]	2		

4 考察

4.1 表よりわかったこと

1. $2^n\sqrt{2}$ と $\dfrac{\sqrt{2}}{2^n}$ の第 2 種連分数展開では, 違う形になる.

2. $n\sqrt{2}$ や $\frac{\sqrt{2}}{n}$ は n が大きくなるにつれて周期は増減するが, $2^{\pm n}\sqrt{2}$ の場合, 前の周期の 2 倍少し増えている.

3. 循環節の最終項は, $\lceil \alpha_0 \rceil$ の 2 倍になっている.

4. 循環節は最終項を除くと点対称になっている.

5. $\alpha_k = \dfrac{A_k\sqrt{2}+B_k}{C_k}$ としたときの A_k の列と C_k の列は点対称になっている.

6. A_k は 2^n の約数になっている.

7. 周期が奇数のときのみ C_k の値が連続するところがある.

4.2 表より得られた命題

4.1 より, 循環節は最終項を除くと点対称になっていることの証明を考えた.
循環節の最終項は, $\lceil \alpha_0 \rceil$ の２倍になっていることは, 平成 19 年度卒業の佐藤 亮介さんが証明をしているので使うことにする.

命題 1

$\sqrt{n}$ の第二種連分数展開における循環節において, 循環部の最終項を除いた部分は, 回文構造を有する. すなわち,

$$\sqrt{n} = [q_0, \overline{q_1, q_2, q_3, \cdots, q_3, q_2, q_1, 2q_0}] \qquad (\text{ただし,} q_l = 2q_0 \text{ とする.})$$

＜証明＞
$\sqrt{n} = [q_0, \overline{q_1, q_2, \cdots, q_{l-2}, q_{l-1}, 2q_0}]$ とする.

$\omega = q_0 - \sqrt{n}$ とおくと,
$\omega = \dfrac{1}{[\overline{q_1, q_2, q_3, \cdots, q_3, q_2, q_1, 2q_0}]}$ であるから,

ω は次の X に関する２次方程式を満たす.

$$X = \cfrac{1}{q_1 - \cfrac{1}{q_2 - \cfrac{1}{\ddots \, \cfrac{\ddots}{2q_0 - X}}}}$$

このとき,

$$\eta = [\overline{2q_0, q_{l-1}, \cdots, q_3, q_2, q_1}] \quad \text{とおく.}$$

ここで, 任意の整数 i に対して
$i \equiv i' \quad (mod\, l)$, $1 \leq i' \leq l$ となる i' をとり, $n_i = q_{i'}$ と定める.
すべての整数 i に対して,

$$x_i = \frac{1}{[\overline{n_{i-1}, n_{i-2}, n_{i-3}, \cdots, n_{i-l}}]} \text{ とおく.}$$

このとき, $x_1 = \dfrac{1}{\eta}$ である.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x_{i+1}} &= [\overline{n_i, n_{i-1}, n_{i-2}, \cdots, n_{i-l+1}}] \\
&= n_i - \frac{1}{[\overline{n_{i-1}, n_{i-2}, n_{i-3}, \cdots, n_{i-l}}]} \\
&= n_i - x_i
\end{aligned}$$

だから,

$$x_i = n_i - \frac{1}{x_{i+1}}$$

特に,

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{1}{x_1} \\
&= \cfrac{1}{q_1 - \cfrac{1}{x_2}} \\
&= \cfrac{1}{q_1 - \cfrac{1}{q_2 - \cfrac{1}{\ddots \cfrac{\ddots}{q_l - \cfrac{1}{x_1}}}}} \\
&= \cfrac{1}{q_1 - \cfrac{1}{q_2 - \cfrac{1}{\ddots \cfrac{\ddots}{2q_0 - \eta}}}}
\end{aligned}$$

となり,η は ω と同じ 2 次方程式を満たす.
$\eta \neq \omega$ なので,η は ω の有理共役 $q_0 + \sqrt{n}$ に等しい.

これを η に代入すると,

$$q_0 + \sqrt{n} = 2q_0 - \cfrac{1}{q_{l-1} - \cfrac{1}{q_{l-2} - \cfrac{1}{\ddots \cfrac{\ddots}{q_1 - \cfrac{1}{q_0 + \sqrt{n}}}}}}$$

よって,

$\sqrt{n} = [q_0, \overline{q_{l-1}, q_{l-2}, \cdots, q_2, q_1, 2q_0}]$

これより,

$\sqrt{n} = [q_0, \overline{q_1, q_2, q_3, \cdots, q_3, q_2, q_1, 2q_0}]$ がわかる.

(q.e.d.)

次に,$\alpha_k = \dfrac{A_k\sqrt{2}+B_k}{C_k}$ としたときの A_k は 2^n の約数になっていることについて考えた.
条件を 1 つ加えることで, 証明をした.

命題 2

数列 α_k を

$$\alpha_0 = 2^n\sqrt{2}\text{ , }\alpha_{k+1} = \frac{1}{\lceil \alpha_k \rceil - \alpha_k} \quad \text{で定める.}$$

このとき, 次の条件を満たしている整数 B_k ,C_k が存在することを示す.

(1) $\alpha_k = \dfrac{2^n\sqrt{2}+B_k}{C_k}$

(2)$B_k^2 - 2^{2n+1}$ は, C_k で割り切れる.

＜証明＞

K に関する数学的帰納法で証明する. (ただし,$N_k = \lceil \alpha_k \rceil$ とする.)

(i) $K=0$ のとき， $B_0 = 0, C_0 = 1$ とすると, 正しいとわかる.

$$(ii)\alpha_{K+1} = \frac{1}{N_k - \dfrac{2^n\sqrt{2}+B_k}{C_k}}$$

$$= \frac{C_k}{C_kN_k - B_k - 2^n\sqrt{2}}$$

$$= \frac{C_k(C_kN_k - B_k + 2^n\sqrt{2})}{(C_kN_k - B_k)^2 - 2^{2n+1}}$$

ここで,

$$C_{k+1} = \frac{(C_kN_k - B_k)^2 - 2^{2n+1}}{C_k} \text{とおくと,}$$

$$C_{k+1} = C_k^2N_k^2 - 2B_kN_k + \frac{B_k^2 - 2^{2n+1}}{C_k} \in \mathbb{Z}$$

また,

$$B_{k+1} = C_kN_k - B_K \in \mathbb{Z} \quad \text{すると,}$$

$$\alpha_{k+1} = \frac{2^n\sqrt{2}+B_{k+1}}{C_{k+1}} \quad \text{かつ,} \quad B_{k+1}^2 - 2^{2n+1} = C_KC_{K+1} \text{ は } C_{k+1} \text{ で割り切れる.}$$

(q.e.d.)

命題 2 の加えた条件 (2)$B_k^2 - 2^{2n+1}$ は, C_k で割り切れる．について,3.1 の結果から確かめてみた.

$8\sqrt{2}$ の $\alpha_2 = \dfrac{2\sqrt{2}+3}{4}$ を例にとって, 考える.

このとき $[A_2, B_2, C_2]$ は $[2, 3, 4]$ である.
これを, 条件 (1) を満たすように換算すると $[8, 12, 16]$ となる.
これより,$n = 3, k = 2$ のときの $B_k^2 - 2^{2n+1}$ は 16 となり,C_k で割り切れる.

他の場合も同様に考えると, 条件 (2) がいえた.

(命題 2 は澤野氏のアドバイスを受けました)

5 今後の課題

今回の研究では, ひげや循環節だけでなく $\alpha_k = \dfrac{A_k\sqrt{2}+B_k}{C_k}$ としたときの $[A_k, B_k, C_k]$ についても調べた. 結果からも多くのことがわかった.
しかし, 完全な証明までたどりつかなかった.
今後は $[A_k, B_k, C_k]$ についても, さらに研究を進め, 是非 4.1 でわかったことや命題 2 の条件 (2) についても証明してもらいたい.

6 感想

Prolog でプログラミングを学び, $\TeX$ を用いて論文を書き, 初めてのことだらけの飯高ゼミでした.
なかなか思い通りにいかないときも先生は親切に教えてくれ, いつも最後の実行ボタンを僕に押させてくれました.
そして, エラーが出ずに出来たときは, いつも一緒に喜んでくれ, 僕もうれしく, 達成感を感じることができた.

あと少しで, 僕の学生生活も終わります. 来年度からは, 教員になります.
僕も飯高先生のように, 分からないことが分かる喜び, できないことができたときの達成感, そして, 数学の楽しさ少しでも子供たちに伝えられる教師になれるようにがんばります.

また, 飯高ゼミのみんなや院生の森山さん, 田中さんに助けられ無事に論文を完成することが出来ました.
本当にありがとうございました.

最後になりますが, 毎日のお菓子にはじまり, ピザ, インド料理などなど本当にごちそうさまでした.

学生時代の最後に, 飯高ゼミで充実した時間を過ごすことができました.

飯高先生, 一年間大変お世話になりました.
いつまでもお元気でいて下さい.

参考文献

[1] 佐藤 亮介　平成 19 年度卒業論文「連分数の研究」

[2] ジョセフ H シルヴァーマン 著, 鈴木 次郎 訳
『はじめての数論』(ピアソンエデュケーション出版,2007 年)