$2^{\pm N}\sqrt{2}$の第２種連分数展開

EXPANSION OF $2^{\pm N}\sqrt{2}$ IN THE CONTINUED FRACTION OF THE SECOND KIND

学習院大学 理学部 数学科

浅沼 亮介

第 2 種連分数展開について

実数 α 以下の整数の中で最大のものを表す $\lfloor \alpha \rfloor$ と, 実数 α 以上の整数の中で最小のものを表す $\lceil \alpha \rceil$ を用いる.

すなわち,

$$\lfloor \alpha \rfloor \leq \alpha < \lfloor \alpha \rfloor + 1 \,, \lceil \alpha \rceil - 1 < \alpha \leq \lceil \alpha \rceil$$

また, $\lfloor \alpha \rfloor$ を用いた連分数展開を第 1 種連分数展開, $\lceil \alpha \rceil$ を用いた連分数展開を第 2 種連分数展開とよぶことにする.

方法

無理数 α_0 の第二種連分数展開を説明する.

無理数 α_0 に対し $N_0 = \lceil \alpha_0 \rceil$ とおく.

$$\alpha_1 = \frac{1}{N_0 - \alpha_0} \quad , \quad N_1 = \lceil \alpha_1 \rceil ,$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{N_1 - \alpha_1} \quad , \quad N_2 = \lceil \alpha_2 \rceil ,$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{N_2 - \alpha_2} \quad , \quad \cdots\cdots\cdots\cdot ,$$

すると

$$\alpha_0 = N_0 - \cfrac{1}{N_1 - \cfrac{1}{N_2 - \cfrac{1}{\vdots}}}$$

のように無限に続く分数でかける.

これをα_0の第二種連分数展開という.

α_0 が二次無理数のとき数列$N_0, N_1, N_2, N_3, \ldots$は必ずあるところから, 繰り返しがおきることが知られている. 繰り返す部分を循環節といい, その長さを周期という. 繰り返しにいくまでのところをひげという.

目的

$2^{\pm n}\sqrt{2}$ を中心に $\alpha_k = \dfrac{A_k\sqrt{2}+B_k}{C_k}(A_k, B_k, C_k \in \mathbb{Z})$ の形を用いて第２種連分数展開を行った.

そのときの周期や循環節, $[A_k, B_k, C_k]$ について調べた.

結果

	$8\sqrt{2}$		$16\sqrt{2}$		$\frac{\sqrt{2}}{4}$		$\frac{\sqrt{2}}{8}$	
ひげ	1		1		1		1	
周期	6		16		4		11	
K	[A,B,C]	N	[A,B,C]	N	[A,B,C]	N	[A,B,C]	N
0	[8,0,1]	12	[16,0,1]	23	[1,0,4]	1	[1,0,8]	1
1	[2,3,4]	2	[16,23,17]	3	[2,8,7]	2	[4,32,31]	2
2	[8,20,17]	2	[4,7,4]	4	**[1,3,2]**	**3**	[2,15,14]	2
3	**[4,7,2]**	**7**	[16,36,49]	2	[2,6,7]	2	[4,26,23]	2
4	[8,14,17]	2	[8,31,34]	2	[1,4,4]	2	[1,5,4]	2
5	[2,5,4]	2	[16,74,73]	2			**[4,12,7]**	**3**
6	[8,12,1]	24	[2,9,8]	2			**[4,9,7]**	**3**
7			[16,56,41]	2			[1,3,4]	2
8			**[8,13,2]**	**13**			[4,20,23]	2
9			[16,26,41]	2			[2,13,14]	2
10			[2,7,8]	2			[4,30,31]	2
11			[16,72,73]	2			[1,8,8]	2
12			[8,37,34]	2				
13			[16,62,49]	2				
14			[4,9,4]	4				
15			[16,28,17]	3				
16			[16,23,1]	46				

Table 1. $2^n\sqrt{2}$ の周期

	$2\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	$8\sqrt{2}$	$16\sqrt{2}$	$32\sqrt{2}$	$64\sqrt{2}$	$128\sqrt{2}$	$256\sqrt{2}$	$512\sqrt{2}$
周期	1	2	6	16	42	106	258	610	1412

Table 2. $\frac{\sqrt{2}}{2^n}$ の周期

	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{16}$	$\frac{\sqrt{2}}{32}$	$\frac{\sqrt{2}}{64}$	$\frac{\sqrt{2}}{128}$	$\frac{\sqrt{2}}{258}$	$\frac{\sqrt{2}}{512}$
周期	2	4	11	27	61	135	295	639	1375

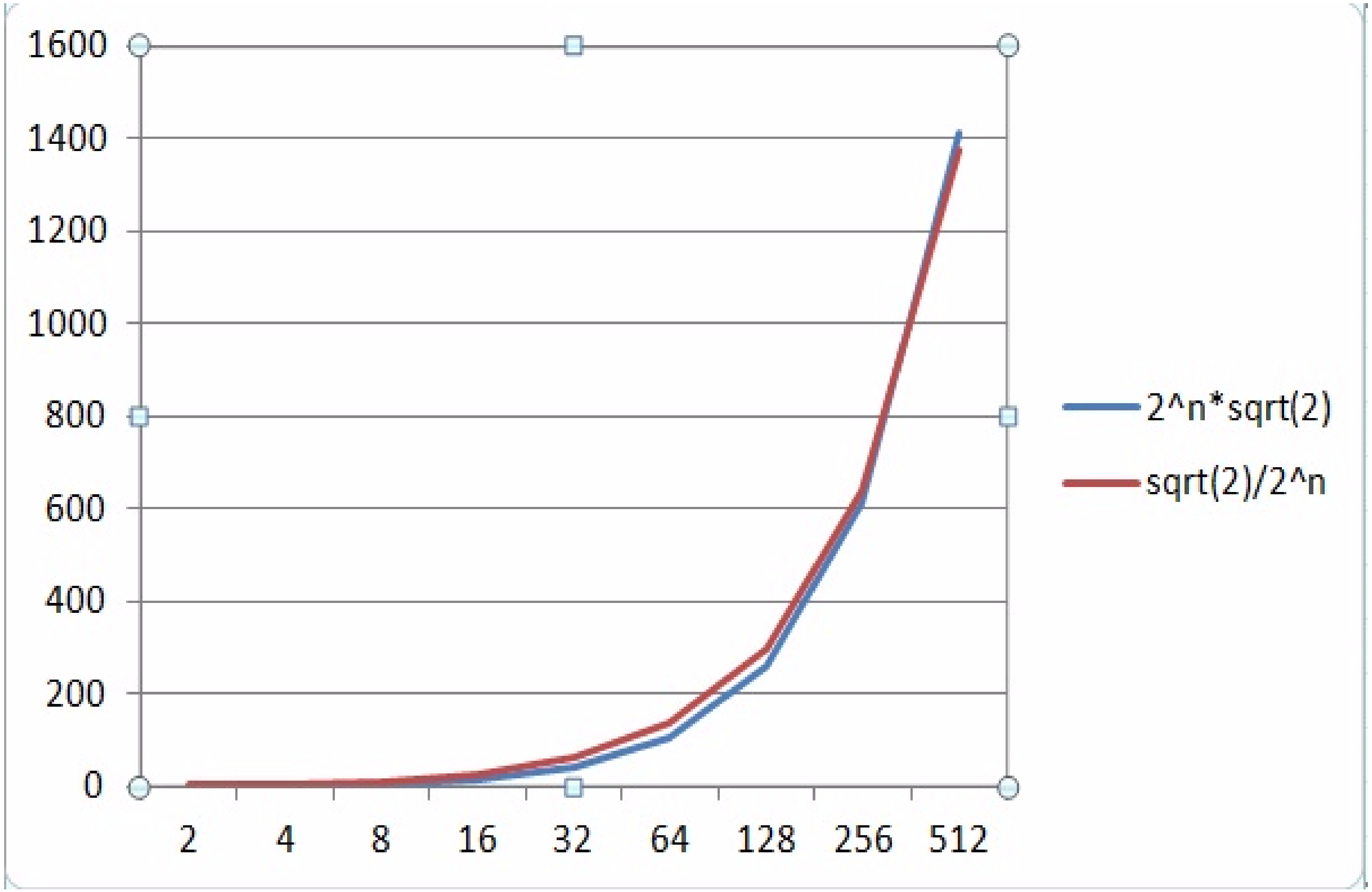

Figure 1. $2^n\sqrt{2}$ と $\dfrac{\sqrt{2}}{2^n}$ の周期

TABLE 3. $n\sqrt{2}$ の周期

	$2\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$	$6\sqrt{2}$	$7\sqrt{2}$	$8\sqrt{2}$	$9\sqrt{2}$	$10\sqrt{2}$	$11\sqrt{2}$	$12\sqrt{2}$	$13\sqrt{2}$
周期	1	4	2	14	2	2	6	16	7	22	1	42

TABLE 4. $\dfrac{\sqrt{2}}{n}$ の周期

	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{5}$	$\frac{\sqrt{2}}{6}$	$\frac{\sqrt{2}}{7}$	$\frac{\sqrt{2}}{8}$	$\frac{\sqrt{2}}{9}$	$\frac{\sqrt{2}}{10}$	$\frac{\sqrt{2}}{11}$	$\frac{\sqrt{2}}{12}$	$\frac{\sqrt{2}}{13}$
周期	2	4	4	8	8	26	11	16	14	22	16	28

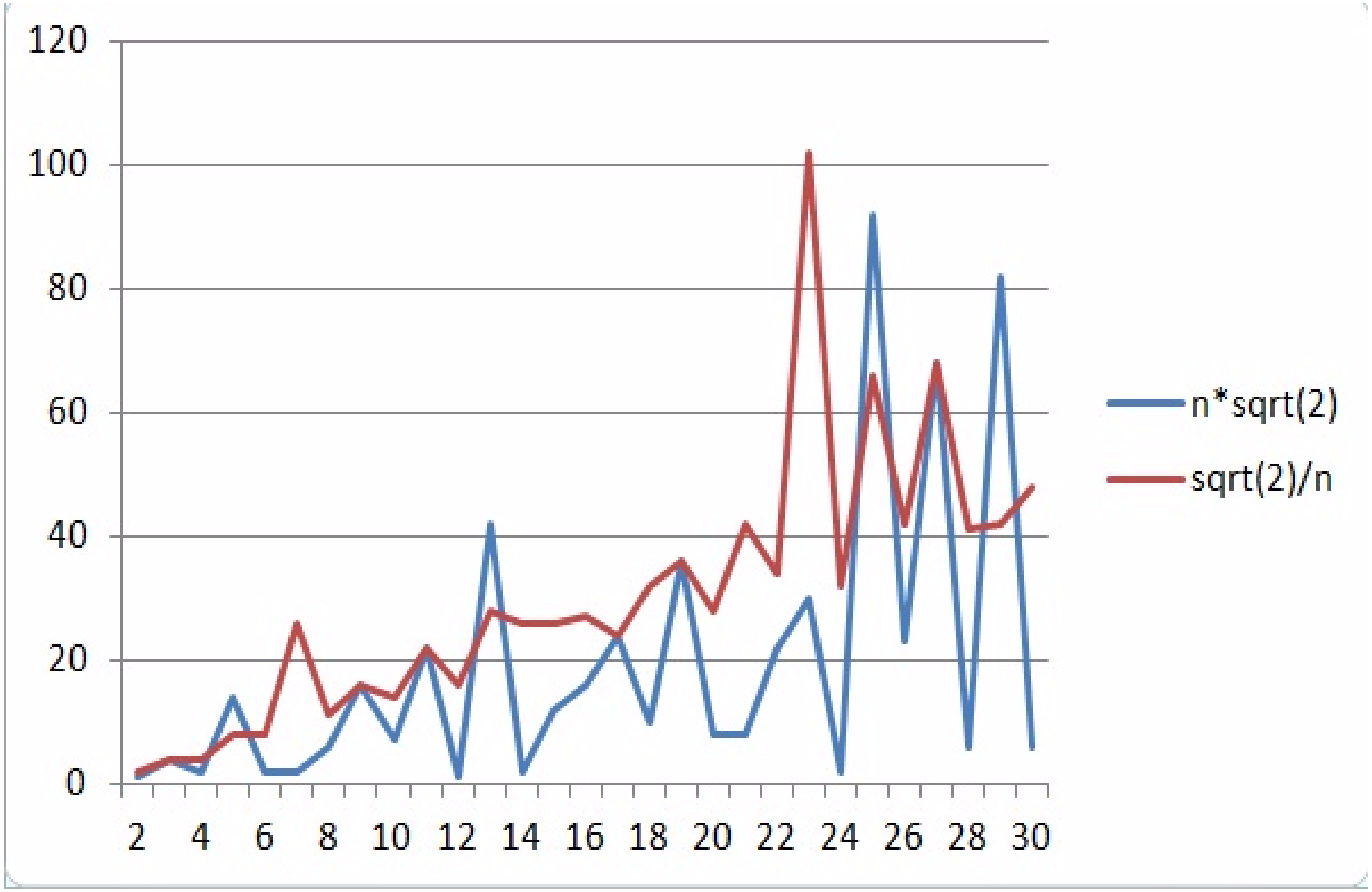

FIGURE 2. $n\sqrt{2}$ と $\dfrac{\sqrt{2}}{n}$ の周期

分かったこと

(1) $2^n\sqrt{2}$ と $\dfrac{\sqrt{2}}{2^n}$ の第２種連分数展開では,違う形になる.

(2) $n\sqrt{2}$ や $\dfrac{\sqrt{2}}{n}$ は n が大きくなるにつれて周期は増減するが,
$2^{\pm n}\sqrt{2}$ の場合, 前の周期の２倍少し増えている.

(3) 循環節は最終項を除くと点対称になっている.

(4) $\alpha_k = \dfrac{A_k\sqrt{2}+B_k}{C_k}$ としたときの A_k の列と C_k の列は点対称になっている.

(5) A_k は 2^n の約数になっている.

	$32\sqrt{2}$
ひげ	1
周期	42

K	[A,B,C]	N
0	[32,0,1]	46
1	[16,23,34]	2
2	[32,90,89]	2
3	[4,11,8]	3
4	[32,104,137]	2
5	[16,85,98]	2
6	[32,222,241]	2
7	[8,65,68]	2
8	[32,284,289]	2
9	[16,147,146]	2
10	[32,290,281]	2
11	[2,17,16]	2
12	[32,240,217]	2
13	[16,97,82]	2
14	[32,134,97]	2
15	[8,15,4]	7
16	[32,52,41]	3
17	[32,71,73]	2
18	[32,75,49]	3
19	[4,9,8]	2
20	[32,56,17]	6
21	**[16,23,2]**	**23**
22	[32,46,17]	6
23	[4,7,8]	2
24	[32,72,49]	3
25	[32,75,73]	2
26	[32,71,41]	3
27	[8,13,4]	7
28	[32,60,97]	2
29	[16,67,82]	2
30	[32,194,217]	2
31	[2,15,16]	2
32	[32,272,281]	2
33	[16,145,146]	2
34	[32,294,289]	2
35	[8,71,68]	2
36	[32,260,241]	2
37	[16,111,98]	2
38	[32,170,137]	2
39	[4,13,8]	3
40	[32,88,89]	2
41	[16,45,34]	2
42	[32,46,1]	92

	$\frac{\sqrt{2}}{16}$	
ひげ	1	
周期	27	
K	[A,B,C]	N
0	[1,0,16]	1
1	[8,128,127]	2
2	[4,63,62]	2
3	[8,122,119]	2
4	[2,29,28]	2
5	[8,108,103]	2
6	[4,49,46]	2
7	[8,86,79]	2
8	[1,9,8]	2
9	[8,56,47]	2
10	[4,19,14]	2
11	[8,18,7]	5
12	[8,17,23]	2
13	**[8,29,31]**	**2**
14	**[8,33,31]**	**2**
15	[8,29,23]	2
16	[8,17,7]	5
17	[4,9,14]	2
18	[8,38,47]	2
19	[1,7,8]	2
20	[8,72,79]	2
21	[4,43,46]	2
22	[8,98,103]	2
23	[2,27,28]	2
24	[8,116,119]	2
25	[4,61,62]	2
26	[8,126,127]	2
27	[1,16,16]	2

考察

命題1

$\sqrt{n}$の第二種連分数展開における循環節において,循環部の最終項を除いた部分は,回文構造を有する.
すなわち,

$$\sqrt{n} = [q_0, \overline{q_1, q_2, q_3, \cdots, q_3, q_2, q_1, 2q_0}]$$

(ただし,$q_l = 2q_0$とする.)

<証明>

$\sqrt{n} = [q_0, \overline{q_1, q_2, \cdots, q_{l-2}, q_{l-1}, 2q_0}]$とする.

$\omega = q_0 - \sqrt{n}$とおくと、

$\omega = \dfrac{1}{\overline{\overline{[q_1, q_2, q_3, \cdots, q_3, q_2, q_1, 2q_0]}}}$であるから,

ωは次のXに関する2次方程式を満たす.

$$X = \cfrac{1}{q_1 - \cfrac{1}{q_2 - \cfrac{1}{\ddots \cfrac{\ddots}{2q_0 - X}}}}$$

このとき,

$$\eta = [\overline{2q_0, q_{l-1}, \cdots, q_3, q_2, q_1}]$$ とおく.

ここで,任意の整数iに対して

$i \equiv i' \pmod{l}$, $1 \leq i' \leq l$ となるi'をとり,$n_i = q_{i'}$ と定める.

すべての整数iに対して,

$x_i = \dfrac{1}{\overline{[n_{i-1}, n_{i-2}, n_{i-3}, \cdots, n_{i-l}]}}$とおく.

このとき,$x_1 = \dfrac{1}{\eta}$である.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x_{i+1}} &= \overline{[n_i, n_{i-1}, n_{i-2}, \cdots, n_{i-l+1}]} \\
&= n_i - \frac{1}{\overline{[n_{i-1}, n_{i-2}, n_{i-3}, \cdots, n_{i-l}]}} \\
&= n_i - x_i
\end{aligned}
$$

だから,

$$x_i = n_i - \frac{1}{x_{i+1}}$$

特に,

$$\eta = \frac{1}{x_1}$$

$$= \frac{1}{q_1 - \dfrac{1}{x_2}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \cfrac{1}{q_1 - \cfrac{1}{q_2 - \cfrac{1}{\ddots \cfrac{\ddots}{q_l - \cfrac{1}{x_1}}}}} \\
&= \cfrac{1}{q_1 - \cfrac{1}{q_2 - \cfrac{1}{\ddots \cfrac{\ddots}{2q_0 - \eta}}}}
\end{aligned}
$$

となり,η は ω と同じ 2 次方程式を満たす.

$\eta \neq \omega$ なので,η はω の有理共役$q_0 + \sqrt{n}$に等しい.

これをηに代入すると,

$$q_0+\sqrt{n}=2q_0-\cfrac{1}{q_{l-1}-\cfrac{1}{q_{l-2}-\cfrac{1}{\ddots\cfrac{\ddots}{q_1-\cfrac{1}{q_0+\sqrt{n}}}}}}$$

よって,

$$\sqrt{n}=[q_0,\overline{q_{l-1},q_{l-2},\cdots,q_2,q_1,2q_0}]$$

これより,

$\sqrt{n}=[q_0,\overline{q_1,q_2,q_3,\cdots,q_3,q_2,q_1,2q_0}]$ がわかる.(証明終)