3分シャフリングの研究

今井康太郎
学習院大学理学部数学科

平成 24 年 2 月 2 日

目 次

1 目的

この研究の目的はトランプをきる時に3分割シャフリングをした場合の数学的な研究をすることである.

2 方法

はじめに2分割のシャフリング ($2n$ 枚) を復習します
8枚のときを例に挙げる

1. カードに番号をつける
   $[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]$

2. 2つの組に分ける
   $[1, 2, 3, 4][5, 6, 7, 8]$

3. 右の組の1番目、左の組の1番目、右の組の2番目 ... と交互に並べ替えていくと
   $[5, 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4]$ となる
   これを繰り返し、元に戻るまで行う

   この場合は

   $[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]$
   $[5, 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4]$
   $[7, 5, 3, 1, 8, 6, 4, 2]$
   $[8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1]$
   $[4, 8, 3, 7, 2, 6, 1, 5]$
   $[2, 4, 6, 8, 1, 3, 5, 7]$
   $[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]$

   6回シャフリングすると元に戻るので、8枚のとき周期は6である

2.1 $3n$ 枚の場合

最初に $3n$ 枚の場合を考える. 具体的に 9 枚の場合で説明する

1. カードに番号をつける
   $[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$

2. 3 つの組に分ける
   $[1, 2, 3][4, 5, 6][7, 8, 9]$

3. 右の組の 1 番目、真ん中の組の 1 番目、左の組の 1 番目、右の組の 2 番目、真ん中の組の 2 番目 $\cdots$ と交互に並べ替えていくと $[7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3]$ となる

これを繰り返し行い、最初の並びに戻るまで行う

```
append0(Z=[]+Z).
append0([A|Z]=[A|X]+Y):- append0(Z=X+Y).

left(A=[]+A,0):-!.
left(A=B+C,N):- N>0,N1 is N-1,!,
    left(A=B1+[X|C],N1),append0(B=B1+[X]),!.

unit(1,[1]).
unit(N,L):- N>1,N1 is N-1,
unit(N1,L1),append0(L=L1+[N]).

sh22([A]=[]+[]+[A]).
sh22([]=[]+[]+[]).
sh22(E=[X|D]+[Y|C]+[Z|B]):-sh22(E0=D+C+B),E=[X,Y,Z|E0].

shuffle22(L,A,B,C,M):- length(L,N),
    N1 is N/3,
    N2 is N/3,
    left22(L=A+B+C,N1,N2),
    sh22(M=C+B+A).

left22(L=A+B+C,N,M):- left(L=A+D,N),left(D=B+C,M).

r_shuffle22(L0,M,N,N).

r_shuffle22(L0,L,C,N):-
```

```
    shuffle22(L,_,_,_,L1),
%    write(C),nl,
%    write(C=L1),nl,
    L0 \== L1 ->(C1 is C+1,r_shuffle22(L0,L1,C1,N));(write(C),nl,true).

ebizo22(NN):- N is NN*3,unit(N,L),r_shuffle22(L,L,1,10000).
ebifor(N):- for(1=< N,X),ebizo22(X),fail.
ebifor(N).
```

2.2　$3n-1$ 枚の場合

$3n-1$ 枚の場合を考える. 具体的に 8 枚で説明する

1. カードを並べる
   $[1,2,3,4,5,6,7,8]$

2. ここに 1 枚カードを加える (a とする)
   $[1,2,3,4,5,6,7,8,a]$

3. これを 3 つの組に分ける
   $[1,2,3][4,5,6][7,8,a]$

4. $3n$ 枚と同様に 1 回シャッフルする
   $[7,4,1,8,5,2,a,6,3]$

5. そこから a を 1 度取り除き、最後にもう 1 度付け加える
   $[7,4,1,8,5,2,6,3,a]$

6. 3〜5 を繰り返し、最初の並びになるまで行う

```
shu1(L=M):- append0(L=M+[a]).
shub2(L=M):- append0(M=A+[a|B]),
    append0(L=A+B).

shuffle33(LL=M):-shu1(L=M),shuffle22(L,A,B,C,M0),
    shub2(LL=M0).

r_shuffle33(M,0):- write(M).

r_shuffle33(M,N):- shuffle33(LL=M),N1 is N-1,
    write(M),nl,
    r_shuffle33(LL,N1).


r_shuffle34(M,M0,N,X):- N1 is N+1,shuffle33(LL=M),
%    write(M),nl,
    (LL \== M0 -> r_shuffle34(LL,M0,N1,X);
    X=N1,
```

```
%    write(LL),
     true ).
r_shuffle35(M,X):- r_shuffle34(M,M,0,X).
ebizo33(N,X):- NN is 3*N-1,unit(NN,M),r_shuffle35(M,X).

kurikaeshi(M):- for(1 =< M,N),ebizo33(N,X),
    N1 is 3*N-1,
%    write(N1=X),put(9),
    write(X),nl,fail.
kurikaeshi(M).
```

2.3　$3n-2$ 枚の場合

この場合は $3n-1$ 枚の時と同じように、a, b を付け加えて行う

1. カードを並べる
   $[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$

2. ここに 2 枚カードを加える (a, b とする)
   $[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, a, b]$

3. これを 3 つの組に分ける
   $[1, 2, 3][4, 5, 6][7, a, b]$

4. $3n$ 枚と同様に 1 回シャッフルする
   $[7, 4, 1, a, 5, 2, b, 6, 3]$

5. そこから a, b を 1 度取り除き、最後にもう 1 度付け加える
   $[7, 4, 1, 5, 2, 6, 3, a, b]$

6. 3〜5 を繰り返し、最初の並びになるまで行う

```
shu44(L=M):-append0(L=M+[a,b]).
shub44(L=M):-append0(M=X+[a|Y]),

append0(Z=X+Y),
append0(Z=U+[b|V]),
append0(L=U+V).

shuffle44(LLL=M):- shu44(L=M),shuffle22(L,A,B,C,M0),
shub44(LLL=M0).

r_shuffle44(M,0):- write(M).
r_shuffle44(M,N):- shuffle44(LLL=M),N1 is N-2,
write(M),nl,r_shuffle44(LLL,N1).

r_shuffle442(M,M0,N,X):- N1 is N+1,shuffle44(LLL=M),
      % write(M),nl,
(LLL \== M0 -> r_shuffle442(LLL,M0,N1,X);
X=N1,
```

```
      % write(LLL),
true).
r_shuffle45(M,X):- r_shuffle442(M,M,0,X).

ebizo44(N,X):- NN is 3*N-2,unit(NN,M),r_shuffle45(M,X).

kurikaeshi2(M):- for(1 =< M,N),ebizo44(N,X),
N1 is 3*N-2,
% write(N1),put(9),
write(X),nl,fail.

kurikaeshi2(M).
```

3　結果

$3n, 3n-1, 3n-2$ 枚 それぞれプログラムを実行し 90 枚までの結果を表にした
(表 1〜3)

また $3n, 3n-1, 3n-2$ 枚 それぞれについてまとめた
(表 4〜6)

以下のような結果となった

$(\ast)$ 表のシャフリングの方法は
$3n$ 枚の時、空白
$3n-1$ 枚の時、(*)(*)
$3n-2$ 枚の時、(*) とした

表 1:

枚数	周期	シャフリングの方法	枚数 − 周期	
1	1	*	0	−
2	2	**	0	−
3	2		1	−
4	4	*	0	−
5	4	**	1	−
6	6		0	−
7	3	*	4	−
8	7	**	1	−
9	4		5	−
10	12	*	−2	+
11	15	**	−4	+
12	3		9	−
13	42	*	−29	+
14	20	**	−6	+
15	4		11	−
16	16	*	0	−
17	66	**	−49	+
18	18		0	−
19	65	*	−46	+
20	45	**	−25	+
21	5		16	−
22	48	*	−26	+
23	68	**	−45	+
24	20		4	−
25	170	*	−145	+
26	66	**	−40	+
27	6		21	−
28	28	*	0	−
29	138	**	−109	+
30	30		0	−

表 2:

枚数	周期	シャフリングの方法	枚数 − 周期	
31	28	*	3	−
32	31	**	1	−
33	16		17	−
34	60	*	−26	+
35	35	**	0	−
36	18		18	−
37	36	*	1	−
38	28	**	10	−
39	4		35	−
40	40	*	0	−
41	390	**	−349	+
42	42		0	−
43	3740	*	−3697	+
44	231	**	−187	+
45	11		34	−
46	528	*	−482	+
47	1200	**	−1153	+
48	42		6	−
49	330	*	−281	+
50	24	**	26	−
51	6		45	−
52	860	*	−808	+
53	780	**	−727	+
54	20		34	−
55	473	*	−418	+
56	55	**	1	−
57	28		29	−
58	2610	*	−2552	+
59	190	**	−131	+
60	10		50	−

表 3:

枚数	周期	シャフリングの方法	枚数 − 周期	
61	1080	*	−1019	+
62	368	**	−306	+
63	16		47	−
64	64	*	0	−
65	946	**	−881	+
66	22		44	−
67	3828	*	−3761	+
68	276	**	−208	+
69	12		57	−
70	4620	*	−4550	+
71	276	**	−205	+
72	12		60	−
73	468	*	−395	+
74	630	**	−556	+
75	18		57	−
76	76	*	0	−
77	222	**	−145	+
78	78		0	−
79	1288	*	−1209	+
80	120	**	−40	+
81	8		73	−
82	11280	*	−11198	+
83	496	**	−413	+
84	16		68	−
85	360	*	−275	+
86	190	**	−104	+
87	10		77	−
88	510	*	−422	+
89	66	**	23	−
90	6		84	−

表 4:

枚数	周期	シャフリングの方法	枚数 – 周期	
3	2		1	–
6	6		0	–
9	4		5	–
12	3		9	–
15	4		11	–
18	18		0	–
21	5		16	–
24	20		4	–
27	6		21	–
30	30		0	–
33	16		17	–
36	18		18	–
39	4		35	–
42	42		0	–
45	11		34	–
48	42		6	–
51	6		45	–
54	20		34	–
57	28		29	–
60	10		50	–
63	16		47	–
66	22		44	–
69	12		57	–
72	12		60	–
75	18		57	–
78	78		0	–
81	8		73	–
84	16		68	–
87	10		77	–
90	6		84	–

表 5:

枚数	周期	シャフリングの方法	枚数 − 周期	
1	1	*	0	−
4	4	*	0	−
7	3	*	4	−
10	12	*	−2	+
13	42	*	−29	+
16	16	*	0	−
19	65	*	−46	+
22	48	*	−26	+
25	170	*	−145	+
28	28	*	0	−
31	28	*	3	−
34	60	*	−26	+
37	36	*	1	−
40	40	*	0	−
43	3740	*	−3697	+
46	528	*	−482	+
49	330	*	−281	+
52	860	*	−808	+
55	473	*	−418	+
58	2610	*	−2552	+
61	1080	*	−1019	+
64	64	*	0	−
67	3828	*	−3761	+
70	4620	*	−4550	+
73	468	*	−395	+
76	76	*	0	−
79	1288	*	−1209	+
82	11280	*	−11198	+
85	360	*	−275	+
88	510	*	−422	+

表 6:

枚数	周期	シャフリングの方法	枚数 − 周期	
2	2	**	0	−
5	4	**	1	−
8	7	**	1	−
11	15	**	−4	+
14	20	**	−6	+
17	66	**	−49	+
20	45	**	−25	+
23	68	**	−45	+
26	66	**	−40	+
29	138	**	−109	+
32	31	**	1	−
35	35	**	0	−
38	28	**	10	−
41	390	**	−349	+
44	231	**	−187	+
47	1200	**	−1153	+
50	24	**	26	−
53	780	**	−727	+
56	55	**	1	−
59	190	**	−131	+
62	368	**	−306	+
65	946	**	−881	+
68	276	**	−208	+
71	276	**	−205	+
74	630	**	−556	+
77	222	**	−145	+
80	120	**	−40	+
83	496	**	−413	+
86	190	**	−104	+
89	66	**	23	−

4　考察

4.1　$3n$ 枚の場合

- 周期 $\leq$ 枚数となる

- 枚数=周期の時、枚数 +1 は素数になる
  また枚数 (周期) 同士の差は 12 の倍数である
  表では $(6, 18, 30, 42, 78)$ 枚の場合、それぞれ +1 をすると $(7, 19, 31, 43, 79)$ = 素数となる

- サイクルに分解して考えてみると
  $L1, L2, \cdots, Lr$ を共通文字のないサイクルとして各々の長さを $l1, l2, \cdots, ln$ としたとき
  周期 $= L1.L2 \cdots Lr$ の位数は $Lcm(l1, l2, \cdots lr)$ となる

  9 枚の時で考えると
  $[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$
  $\downarrow$
  $[7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3]$

  $L1 = (1, 7, 9, 3), L2 = (2, 4, 8, 6), L3 = (5)$
  $l1 = 4, l2 = 4, l3 = 1$ となり
  周期　$= Lcm(l1, l2, l3) \quad = Lcm(4, 4, 1) = 4$ となる

- 周期 (s) と枚数 $(3n)$ の関係性

$3^s \ \equiv \ 1 \mod (3n+1)$
すなわち
$3^s - 1 = G(3n+1)$ が成り立つ
G(整数)

$1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots, 2n, 2n+1, \ldots, 3n \quad$ (x 番目が x)

$\downarrow$ (1 回シャフル)

$2n+1, n+1, 1, \ldots, 2n+2, \ldots, n \quad$ (x 番目が y)

$\downarrow$ (x 番目が $3y$ になるようにする)

$6n+3, 3n+3, 3, \ldots, 6n+6, \ldots, 3n \quad \mod (3n+1)$

$\downarrow$

$1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots, 2n, 2n+1, \ldots, 3n$

このことから

$3y \equiv x \mod (3n+1)$

$3(-n) = -(3n+1) + 1 \equiv 1 \mod (3n+1)$

$3(-n)y \equiv -nx$

$y = -nx \cdots (1)$
2 回するとzとすると
$z \ \equiv \ -ny \ \equiv \ (-n)^2 x \qquad$ *(1) 代入

s 回すると u とすると
$u \ \equiv \ (-n)^s x \ \equiv \ x$

$3(-n) \ \equiv \ 1 \mod (3n+1)$
$-n \ \equiv \ \frac{1}{3}$

$(-n)^s \ \equiv \ 1 \mod (3n+1)$
$(-n)^s \ \equiv \ \frac{1}{3^s} \ \equiv \ 1$

$3^s \equiv 1$

よって

$3^s - 1 = G(3n+1)$　となる

(∗) この関係式より周期から枚数を求めることができる

周期が $2(=s)$ のとき　関係式に代入すると

$3^2 - 1 = G(3n+1)$
$8 = G(3n+1)$

G は整数、$3n$ 枚も枚数で整数であるから、G, n ともに整数となる

$G = 2$　とき
$8 = 6n + 2$
$n = 1$
よって周期 2 のときの枚数 3 枚である

また、周期が $4(=s)$ のとき関係式に代入すると

$G = 2$ のとき、$n = 13$
$G = 5$ のとき、$n = 5$
$G = 8$ のとき、$n = 3$
よって周期 4 のとき枚数は 9,15,39 枚と求めることができる

4.2　$3n-1$,$3n-2$ 枚の場合

- 周期と枚数の関係にこれといった規則性は見られない
  ($3n$ 枚の場合は常に周期 $\leq$ 枚数が成り立っていた)

- 枚数 $=$ 周期の場合もあるが、枚数 $+1$ は必ずしも素数にはならない
  また周期 (枚数) 同士の差は 12 の倍数である

5　感想