3分シャフリングの研究

今井康太郎
学習院大学理学部数学科

1. 目的

この研究の目的はトランプをきる時に3分割シャフリングをした場合の数学的な研究をすることである.

2. 方法

はじめに2分割($2n$枚)シャフリングの復習をします
8枚のときを例に挙げる

(1) カードに番号をつける
$[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]$

(2) 2つの組に分ける
$[1, 2, 3, 4][5, 6, 7, 8]$

(3) 右の組の1番目、左の組の1番目、右の組の2番目...と交互に並べ替えていくと
$[5, 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4]$となる
これを繰り返し、元に戻るまで行う

2.1. $3n$ 枚の場合. 最初に$3n$枚の場合を考える.具体的に9枚の場合で説明する

(1) カードに番号をつける
$[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$

(2) 3つの組に分ける
$[1, 2, 3][4, 5, 6][7, 8, 9]$

(3) 右の組の1番目、真ん中の組の1番目、左の組の1番目、右の組の2番目、真ん中の組の2番目$\cdots$ と交互に並べ替えていくと $[7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3]$となる

これを繰り返し行い、最初の並びに戻るまで行う

2.2. **$3n-1$ 枚の場合.** $3n-1$ 枚の場合を考える.具体的に8枚で説明する

(1) カードを並べる

$[1,2,3,4,5,6,7,8]$

(2) ここに1枚カードを加える(a とする)

$[1,2,3,4,5,6,7,8,a]$

(3) これを3つの組に分ける

$[1,2,3][4,5,6][7,8,a]$

(4) $3n$ 枚と同様に1回シャッフルする

$[7,4,1,8,5,2,a,6,3]$

(5) そこからaを1度取り除き、最後にもう1度付け加える

$[7, 4, 1, 8, 5, 2, 6, 3, a]$

(6) 3〜5を繰り返し、最初の並びになるまで行う

2.3. $3n-2$ **枚の場合.** この場合は$3n-1$枚の時と同じように、a,bを付け加えて行う

(1) カードを並べる

$[1,2,3,4,5,6,7]$

(2) ここに2枚カードを加える(a,bとする)

$[1,2,3,4,5,6,7,a,b]$

(3) これを3つの組に分ける

$[1,2,3][4,5,6][7,a,b]$

(4) $3n$枚と同様に1回シャッフルする

$[7,4,1,a,5,2,b,6,3]$

(5) そこからa,bを1度取り除き、最後にもう1度付け加える

$[7, 4, 1, 5, 2, 6, 3, a, b]$

(6) 3〜5を繰り返し、最初の並びになるまで行う

3. 結果

TABLE 1

枚数	周期	シャフリングの方法	枚数 − 周期	
1	1	*	0	−
2	2	**	0	−
3	2		1	−
4	4	*	0	−
5	4	**	1	−
6	6		0	−
7	3	*	4	−
8	7	**	1	−
9	4		5	−
10	12	*	−2	+
11	15	**	−4	+
12	3		9	−
13	42	*	−29	+
14	20	**	−6	+
15	4		11	−
16	16	*	0	−
17	66	**	−49	+
18	18		0	−
19	65	*	−46	+
20	45	**	−25	+
21	5		16	−
22	48	*	−26	+
23	68	**	−45	+
24	20		4	−
25	170	*	−145	+
26	66	**	−40	+
27	6		21	−
28	28	*	0	−
29	138	**	−109	+
30	30		0	−

TABLE 2

枚数	周期	シャフリングの方法	枚数 − 周期	
31	28	*	3	−
32	31	**	1	−
33	16		17	−
34	60	*	−26	+
35	35	**	0	−
36	18		18	−
37	36	*	1	−
38	28	**	10	−
39	4		35	−
40	40	*	0	−
41	390	**	−349	+
42	42		0	−
43	3740	*	−3697	+
44	231	**	−187	+
45	11		34	−
46	528	*	−482	+
47	1200	**	−1153	+
48	42		6	−
49	330	*	−281	+
50	24	**	26	−
51	6		45	−
52	860	*	−808	+
53	780	**	−727	+
54	20		34	−
55	473	*	−418	+
56	55	**	1	−
57	28		29	−
58	2610	*	−2552	+
59	190	**	−131	+
60	10		50	−

Table 3

枚数	周期	シャフリングの方法	枚数 − 周期	
61	1080	*	−1019	+
62	368	**	−306	+
63	16		47	−
64	64	*	0	−
65	946	**	−881	+
66	22		44	−
67	3828	*	−3761	+
68	276	**	−208	+
69	12		57	−
70	4620	*	−4550	+
71	276	**	−205	+
72	12		60	−
73	468	*	−395	+
74	630	**	−556	+
75	18		57	−
76	76	*	0	−
77	222	**	−145	+
78	78		0	−
79	1288	*	−1209	+
80	120	**	−40	+
81	8		73	−
82	11280	*	−11198	+
83	496	**	−413	+
84	16		68	−
85	360	*	−275	+
86	190	**	−104	+
87	10		77	−
88	510	*	−422	+
89	66	**	23	−
90	6		84	−

4. 考察

4.1. $3n$ 枚の場合.

- 周期 $\leq$ 枚数となる

- 枚数=周期の時、枚数+1は素数になる
  また枚数(周期)同士の差は12の倍数である

  (＊)
  6枚のとき、周期6
  18枚のとき、周期18
  30枚のとき、周期30
  42枚のとき、周期42
  78枚のとき、周期78…

- サイクルに分解して考えてみると
  $L1, L2, \cdots, Lr$ を共通文字のないサイクルとして各々の長さを $l1, l2, \cdots, ln$ としたとき
  周期 $= L1.L2 \cdots Lr$ の位数は $Lcm(l1, l2, \cdots lr)$ となる

9枚の時で考えると

$$[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$$
$$\downarrow$$
$$[7, 4, 1, 8, 5, 2, 9, 6, 3]$$

$L1$ =(1,7,9,3),$L2$ =(2,4,8,6),$L3$ =(5)

$l1 = 4, l2 = 4, l3 = 1$ となり

周期= Lcm(l1,l2,l3)　=Lcm(4,4,1)=4 となる

- 周期(s)と枚数$(3n)$の関係性

$3^s \equiv 1 \mod (3n+1)$
すなわち
$3^s - 1 = G(3n+1)$が成り立つ
G(整数)

$1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots, 2n, 2n+1, \ldots, 3n \quad$ (x番目がx)

$\downarrow$ (1回シャフル)

$2n+1, n+1, 1, \ldots, 2n+2, \ldots, n \quad$ (x番目がy)

$\downarrow$ (yを3倍する)

$6n+3, 3n+3, 3, \ldots, 6n+6, \ldots, 3n \quad \mod (3n+1)$

$$\downarrow$$

$$1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots, 2n, 2n+1, \ldots, 3n$$

このことから

$$3y \equiv x \mod (3n+1)$$

$$3(-n) = -(3n+1) + 1 \equiv 1 \mod (3n+1)$$

$$3(-n)y \equiv -nx$$

$$y = -nx \cdots (1)$$

2回するとzとすると

$z \equiv -ny \equiv (-n)^2 x$ *(1)代入

s回するとuとすると

$u \equiv (-n)^s x \equiv x$

$$3(-n) \equiv 1 \mod (3n+1)$$

$$(-n)^s \equiv 1 \mod (3n+1)$$

$$(-n)^s \equiv \frac{1}{3^s} \equiv 1$$

$$3^s \equiv 1 \mod (3n+1)$$

よって $3^s - 1 = G(3n+1)$ となる

$(*)$この関係式より周期から枚数を求めることができる

周期が$2(=s)$のとき　関係式に代入すると

$3^2-1=G(3n+1)$
$8=G(3n+1)$

G,nともに整数となる解を探す

$G=2$　とき
$8=6n+2$
$n=1$
よって周期2のときの枚数3枚である

また、周期が$4(=s)$のとき関係式に代入すると

$G=2$のとき、$n=13$
$G=5$のとき、$n=5$
$G=8$のとき、$n=3$
よって周期4のとき枚数は9,15,39枚と求めることができる

4.2. $3n-1$,$3n-2$枚の場合.

- 周期と枚数の関係にこれといった規則性は見られない
  ($3n$枚の場合は周期$\leq$ 枚数が成り立っていた)

- 枚数=周期の場合もあるが、枚数+1は必ずしも素数にはならない
  また周期(枚数)同士の差は12の倍数である

途中でこれは赤とします

これは緑

これはカーネーションCarnationPink

これはForestGreen

これはLimeGreen

これはLimeGreen

これはLimeGreen

枠緑 背景は青色

枠赤　背景黄色

字の背景に色をつけましょう

これは黄色

これは赤

平面代数曲線は古くから研究されてきた

ここに１０行位書く