$2^n\sqrt{2}$ などの連分数展開の研究

板倉　新

学習院大学理学部数学科

平成 24 年 2 月 3 日

目 次

1　目的

無理数 α の連分数展開とは、無理数 α に対し $N_1 = [\alpha]$ とおし、$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha - N_1}$, $N_2 = [\alpha_1]$ とし、$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha - N_2}$, $N_3 = [\alpha_2]$, $\alpha_3 = \ \cdots$ 　と続く。
すると、

$$\alpha = N_1 + \cfrac{1}{N_2 + \cfrac{1}{N_3 + \cfrac{1}{\vdots}}}$$

のように無限に続く分数でかける。これを α の (正規)連分数展開 という。

α が 2 次無理数のとき 数列 $N_1, N_2, N_3, \ldots$ は必ずあるところから、繰り返しがおきることが知られている。繰り返す部分を 循環節 といい、その長さを 周期 という。循環節にいくまでのところを ひげ という。

$\alpha = a\sqrt{2}$ $(a = 2^n, n, \frac{1}{2^n})$ に関してひげの長さと循環節の周期について研究することを目的とする。

2　方法

2.1　プログラム

```
:- dynamic ts/1.
ts([0,0,0]).
sagasu0(L,M,I =<J):- abolish(ts/1),
    asserta(ts(L)),
    sagasu(L,M,I =<J).

sagasu(L,M,I =<J):- tugi_Q(L,L2,M,Q),
    write(I=L), put(9),
    write(Q), nl,
    I1 is I+1, I1 =<J,
    ( \+ ts(L2) -> (asserta(ts(L2)),
            sagasu(L2,M,I1 =<J));
    write(I1=L2)).

tugi_Q([A,B,C],[A2,B2,C2],M,N):-
    X is (A*sqrt(M)+B)/C,
    N is floor(X),
    B1 is B-N*C,
    gyaku([A0,B0,C0]=1/[A,B1,C],M),
    gcd3(DD=[A0,B0,C0]),
    A2 is A0//DD,
    B2 is B0//DD,
    C2 is C0//DD.

gyaku([A1,B1,C1]=1/[A,B,C],M):-
    A1 is C*A,
    B1 is -C*B,
    C1 is -B*B+M*A*A.

gcd3(DD=[A,B,C]):-
    gcd2(D=[A,B]),
    gcd2(DD=[D,C]).

gcd2(A=[A,0]).
gcd2(D=[A,B]):-
    B1 is A mod B, A1 = B,
    gcd2(D=[A1,B1]).
```

2.2　プログラムについて

無理数 $\alpha > 1$, N_1 を α の整数部分 $[\alpha]$ とすると、
$\alpha - N_1 < 1$, $\alpha_1 = \frac{1}{\alpha - N_1}$ と繰り返す。
$\alpha - N_1 = \frac{1}{\alpha_1}$, $\alpha = N_1 + \frac{1}{\alpha_1}$
$\alpha_1 = N_2 + \frac{1}{\alpha_2}$
$\alpha_2 = N_3 + \frac{1}{\alpha_3}$
とすると、

$$\alpha = N_1 + \cfrac{1}{N_2 + \cfrac{1}{N_3 + \cfrac{1}{\vdots}}}$$

となる。 このときできた数列 N_1 , N_2 , N_3 , $\cdots$ を α の連分数展開という。α に対して、連分数展開をすると途中から循環する部分があらわれるので、それを求める。a, b を有理数とするとき、$\alpha = a\sqrt{M} + b$ を整数の組 $[A, B, C](\sqrt{M})$ で表示するため、a, b の分母を共通の C にして、$a = \frac{A}{C}, b = \frac{B}{C}$ とおく、$\alpha = \frac{A\sqrt{M}+B}{C}$ となる。この形を用いて α の連分数展開をする。

例） $A = 5, B = 0, C = 2, M = 2$ とおくと、$\alpha = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ となる。
$N_1 = [\alpha] = 3$
$\alpha_1 = \dfrac{1}{\frac{5\sqrt{2}}{2} - 3} = \frac{5\sqrt{2}+6}{7}$
$N_2 = [\alpha_1] = 1$
$\alpha_2 = \dfrac{1}{\frac{5\sqrt{2}+6}{7} - 1} = \frac{5\sqrt{2}+1}{7}$
$N_3 = [\alpha_2] = 1$
$\alpha_3 = \dfrac{1}{\frac{5\sqrt{2}+1}{7} - 1} = \frac{5\sqrt{2}+6}{2}$
$N_4 = [\alpha_3] = 6$
$\alpha_4 = \dfrac{1}{\frac{5\sqrt{2}+6}{2} - 6} = \frac{5\sqrt{2}+6}{7} = \alpha_1$

よって、3,1,1,6,1,1,6,$\cdots$となり、以下 1,1,6 が繰り返される。
従って、 $A = 5, B = 0, C = 2, M = 2$ としたときの連分数展開の循環節は [1,1,6] となる。

$$\frac{5\sqrt{2}}{2} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{\vdots}}}}}}}$$

3　結果

3.1　表の見方

表 1: $7\sqrt{2}$ の連分数展開

$n \setminus \alpha_n$	[A,B,C]($\sqrt{M}$)	$[\alpha_n]$
0	[7, 0, 1]($\sqrt{2}$)	9
1	[7, 9, 17]($\sqrt{2}$)	1
2	[7, 8, 2]($\sqrt{2}$)	8
3	[7, 8, 17]($\sqrt{2}$)	1
4	[7, 9, 1]($\sqrt{2}$)	18
5	[7, 9, 17]($\sqrt{2}$)	

上記の表 1 は、2.2 プログラムについて で述べたように、$\alpha = \frac{A\sqrt{M}+B}{C}$ の形を用いて連分数展開を行っている。
これは、[A,B,C]($\sqrt{M}$) = [7,0,1]($\sqrt{2}$) とおいたときの表である。

これより、表の見方について説明する。
まず、１行目の [A,B,C]($\sqrt{M}$) は、$\alpha = \frac{A\sqrt{M}+B}{C}$ の形を表している。
$A = 7, B = 0, C = 1, M = 2$ とおく。
$\alpha = 7\sqrt{2}$, $N_1 = [\alpha] = 9$
つまり、表 1 の２行目の $0, [7, 0, 1](\sqrt{2}), 9$ はこのときの 番号, [A,B,C]($\sqrt{M}$), N_1 を示す。

以上より、連分数展開の定義に従うと、
$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha - N_1} = \frac{7\sqrt{2}+9}{17}$, $N_2 = [\alpha_1] = 1$
よって、３行目の $1, [7, 9, 17](\sqrt{2}), 1$ はこのときの n,[A,B,C]($\sqrt{M}$),N_2 を示す。

$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - N_2} = \frac{7\sqrt{2}+8}{2}$, $N_3 = [\alpha_2] = 8$
４行目の $2, [7, 8, 2](\sqrt{2}), 8$ はこのときの n,[A,B,C]($\sqrt{M}$),N_3 を示す。

$\alpha_3 = \frac{1}{\alpha_2 - N_3} = \frac{7\sqrt{2}+8}{17}$, $N_4 = [\alpha_3] = 1$
５行目の $3, [7, 8, 17](\sqrt{2}), 9$ はこのときの n,[A,B,C]($\sqrt{M}$),N_4 を示す。

$\alpha_4 = \frac{1}{\alpha_3 - N_4} = \frac{7\sqrt{2}+9}{1}$, $N_5 = [\alpha_4] = 18$
６行目の $4, [7, 9, 1](\sqrt{2}), 18$ はこのときの n,[A,B,C]($\sqrt{M}$),N_5 を示す。

$\alpha_5 = \frac{1}{\alpha_4 - N_5} = \frac{7\sqrt{2}+9}{17} = \alpha_1$

よって、9,1,8,1,18,1,8,1,18,1,8,1,18, ... となり、以下 1,8,1,18 が繰り返される。
従って、$A = 7, B = 0, C = 1, M = 2$ としたとき、連分数展開の循環節は [1,8,1,18] となり、ひげは 1 だと分かる。

$$7\sqrt{2} = 9 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{\vdots}}}}}}}}}$$

表 2: $\frac{A\sqrt{2}}{C}$ を連分数展開したときの循環節の長さ

$C \setminus A$	1	5	29	169
1	1	1	1	1
2		3	3	3
3		8	8	8
4		6	6	6
5		1	11	9
6		12	12	12
7		2	18	14

これは、$\frac{A\sqrt{2}}{C}$（$A = 1, 5, 29, 169$、$1 \leq C \leq 7$）を連分数展開したときの循環節の長さ（周期）の表である。
表中に値が書かれていない空欄があるが、$\frac{A\sqrt{2}}{C}$ の分母 C が分子 $A\sqrt{2}$ より大きくなるので書かない。

3.2　$2^{n-1}\sqrt{2}$ （$n \in \mathbb{N}$）の連分数展開

$A = 2^{n-1}, B = 0, C = 1, M = 2$ で計算した。

表 3: $2^{n-1}\sqrt{2}$ （$1 \le n \le 6$）の連分数展開

$n \setminus \alpha_n$	$[A,B,C](\sqrt{M})$	$[\alpha_n]$	$n \setminus \alpha_n$	$[A,B,C](\sqrt{M})$	$[\alpha_n]$
0	$[1, 0, 1](\sqrt{2})$	1	0	$[2, 0, 1](\sqrt{2})$	2
1	$[1, 1, 1](\sqrt{2})$	2	1	$[1, 1, 2](\sqrt{2})$	1
2	$[1, 1, 1](\sqrt{2})$		2	$[2, 2, 1](\sqrt{2})$	4
			3	$[1, 1, 2](\sqrt{2})$	
0	$[4, 0, 1](\sqrt{2})$	5	0	$[8, 0, 1](\sqrt{2})$	11
1	$[4, 5, 7](\sqrt{2})$	1	1	$[8,11, 7](\sqrt{2})$	3
2	$[2, 1, 2](\sqrt{2})$	1	2	$[4, 5, 2](\sqrt{2})$	5
3	$[4, 2, 7](\sqrt{2})$	1	3	$[8,10, 7](\sqrt{2})$	3
4	$[4, 5, 1](\sqrt{2})$	10	4	$[8,11, 1](\sqrt{2})$	22
5	$[4, 5, 7](\sqrt{2})$		5	$[8,11, 7](\sqrt{2})$	
0	$[16, 0, 1](\sqrt{2})$	22	0	$[32, 0, 1](\sqrt{2})$	45
1	$[8,11,14](\sqrt{2})$	1	1	$[32,45,23](\sqrt{2})$	3
2	$[16, 6,17](\sqrt{2})$	1	2	$[4, 3, 8](\sqrt{2})$	1
3	$[16,11,23](\sqrt{2})$	1	3	$[32,40, 7](\sqrt{2})$	12
4	$[4, 3, 4](\sqrt{2})$	2	4	$[8,11, 4](\sqrt{2})$	5
5	$[16,20, 7](\sqrt{2})$	6	5	$[32,36,47](\sqrt{2})$	1
6	$[8,11, 2](\sqrt{2})$	11	6	$[32,11,41](\sqrt{2})$	1
7	$[16,22, 7](\sqrt{2})$	6	7	$[16,15,14](\sqrt{2})$	2
8	$[4, 5, 4](\sqrt{2})$	2	8	$[32,26,49](\sqrt{2})$	1
9	$[16,12,23](\sqrt{2})$	1	9	$[32,23,31](\sqrt{2})$	2
10	$[16,11,17](\sqrt{2})$	1	10	$[32,39,17](\sqrt{2})$	4
11	$[8, 3,14](\sqrt{2})$	1	11	$[32,29,71](\sqrt{2})$	1
12	$[16,22, 1](\sqrt{2})$	44	12	$[16,21, 2](\sqrt{2})$	21
13	$[8,11,14](\sqrt{2})$		13	$[32,42,71](\sqrt{2})$	1
			14	$[32,29,17](\sqrt{2})$	4
			15	$[32,39,31](\sqrt{2})$	2
			16	$[32,23,49](\sqrt{2})$	1
			17	$[16,13,14](\sqrt{2})$	2
			18	$[32,30,41](\sqrt{2})$	1
			19	$[32,11,47](\sqrt{2})$	1
			20	$[8, 9, 4](\sqrt{2})$	5
			21	$[32,44, 7](\sqrt{2})$	12
			22	$[4, 5, 8](\sqrt{2})$	1
			23	$[32,24,23](\sqrt{2})$	3
			24	$[32,45, 1](\sqrt{2})$	90
			25	$[32,45,23](\sqrt{2})$	

表 4: $2^6\sqrt{2}$ の連分数展開

$n \setminus \alpha_n$	$[A,B,C](\sqrt{M})$	$[\alpha_n]$	$n \setminus \alpha_n$	$[A,B,C](\sqrt{M})$	$[\alpha_n]$
0	[64, 0, 1]($\sqrt{2}$)	90	25	[64,90, 23]($\sqrt{2}$)	7
1	[32,45, 46]($\sqrt{2}$)	1	26	[64,71,137]($\sqrt{2}$)	1
2	[64, 2, 89]($\sqrt{2}$)	1	27	[32,33, 14]($\sqrt{2}$)	5
3	[64,87, 7]($\sqrt{2}$)	25	28	[64,74, 97]($\sqrt{2}$)	1
4	[8,11, 8]($\sqrt{2}$)	2	29	[64,23, 79]($\sqrt{2}$)	1
5	[64,40,103]($\sqrt{2}$)	1	30	[8, 7, 8]($\sqrt{2}$)	2
6	[64,63, 41]($\sqrt{2}$)	3	31	[64,72, 47]($\sqrt{2}$)	3
7	[16,15, 28]($\sqrt{2}$)	1	32	[64,69, 73]($\sqrt{2}$)	2
8	[64,52, 49]($\sqrt{2}$)	2	33	[64,77, 31]($\sqrt{2}$)	5
9	[32,23, 62]($\sqrt{2}$)	1	34	[32,39, 34]($\sqrt{2}$)	2
10	[64,78, 17]($\sqrt{2}$)	9	35	[64,58, 71]($\sqrt{2}$)	2
11	[64,85,151]($\sqrt{2}$)	1	36	[16,21, 4]($\sqrt{2}$)	10
12	[16,19, 4]($\sqrt{2}$)	10	37	[64,76,151]($\sqrt{2}$)	1
13	[64,84, 71]($\sqrt{2}$)	2	38	[64,75, 17]($\sqrt{2}$)	9
14	[32,29, 34]($\sqrt{2}$)	2	39	[32,39, 62]($\sqrt{2}$)	1
15	[64,78, 31]($\sqrt{2}$)	5	40	[64,46, 49]($\sqrt{2}$)	2
16	[64,77, 73]($\sqrt{2}$)	2	41	[16,13, 28]($\sqrt{2}$)	1
17	[64,69, 47]($\sqrt{2}$)	3	42	[64,60, 41]($\sqrt{2}$)	3
18	[8, 9, 8]($\sqrt{2}$)	2	43	[64,63,103]($\sqrt{2}$)	1
19	[64,56, 79]($\sqrt{2}$)	1	44	[8, 5, 8]($\sqrt{2}$)	2
20	[64,23, 97]($\sqrt{2}$)	1	45	[64,88, 7]($\sqrt{2}$)	25
21	[32,37, 14]($\sqrt{2}$)	5	46	[64,87, 89]($\sqrt{2}$)	1
22	[64,66,137]($\sqrt{2}$)	1	47	[32, 1, 46]($\sqrt{2}$)	1
23	[64,71, 23]($\sqrt{2}$)	7	48	[64,90, 1]($\sqrt{2}$)	180
24	[32,45, 2]($\sqrt{2}$)	45	49	[32,45, 46]($\sqrt{2}$)	

3.3 $\dfrac{\sqrt{2}}{2^n}$ （$n \in \mathbb{N}$）の連分数展開

$A = 1, B = 0, C = 2^n, M = 2$ で計算した。

表 5: $\dfrac{\sqrt{2}}{2^n}$ （$1 \le n \le 6$）の連分数展開

$n \setminus \alpha_n$	$[A, B, C](\sqrt{M})$	$[\alpha_n]$	$n \setminus \alpha_n$	$[A, B, C](\sqrt{M})$	$[\alpha_n]$
0	[1, 0, 2]($\sqrt{2}$)	0	0	[1, 0, 4]($\sqrt{2}$)	0
1	[1, 0, 1]($\sqrt{2}$)	1	1	[2, 0, 1]($\sqrt{2}$)	2
2	[1, 1, 1]($\sqrt{2}$)	2	2	[1, 1, 2]($\sqrt{2}$)	1
3	[1, 1, 1]($\sqrt{2}$)		3	[2, 2, 1]($\sqrt{2}$)	4
			4	[1, 1, 2]($\sqrt{2}$)	
0	[1, 0, 8]($\sqrt{2}$)	0	0	[1, 0, 16]($\sqrt{2}$)	0
1	[4, 0, 1]($\sqrt{2}$)	5	1	[8, 0, 1]($\sqrt{2}$)	11
2	[4, 5, 7]($\sqrt{2}$)	1	2	[8, 11, 7]($\sqrt{2}$)	3
3	[2, 1, 2]($\sqrt{2}$)	1	3	[4, 5, 2]($\sqrt{2}$)	5
4	[4, 2, 7]($\sqrt{2}$)	1	4	[8, 10, 7]($\sqrt{2}$)	3
5	[4, 5, 1]($\sqrt{2}$)	10	5	[8, 11, 1]($\sqrt{2}$)	22
6	[4, 5, 7]($\sqrt{2}$)		6	[8, 11, 7]($\sqrt{2}$)	
0	[1, 0, 32]($\sqrt{2}$)	0	0	[1, 0, 64]($\sqrt{2}$)	0
1	[16, 0, 1]($\sqrt{2}$)	22	1	[32, 0, 1]($\sqrt{2}$)	45
2	[8, 11, 14]($\sqrt{2}$)	1	2	[32, 45, 23]($\sqrt{2}$)	3
3	[16, 6, 17]($\sqrt{2}$)	1	3	[4, 3, 8]($\sqrt{2}$)	1
4	[16, 11, 23]($\sqrt{2}$)	1	4	[32, 40, 7]($\sqrt{2}$)	12
5	[4, 3, 4]($\sqrt{2}$)	2	5	[8, 11, 4]($\sqrt{2}$)	5
6	[16, 20, 7]($\sqrt{2}$)	6	6	[32, 36, 47]($\sqrt{2}$)	1
7	[8, 11, 2]($\sqrt{2}$)	11	7	[32, 11, 41]($\sqrt{2}$)	1
8	[16, 22, 7]($\sqrt{2}$)	6	8	[16, 15, 14]($\sqrt{2}$)	2
9	[4, 5, 4]($\sqrt{2}$)	2	9	[32, 26, 49]($\sqrt{2}$)	1
10	[16, 12, 23]($\sqrt{2}$)	1	10	[32, 23, 31]($\sqrt{2}$)	2
11	[16, 11, 17]($\sqrt{2}$)	1	11	[32, 39, 17]($\sqrt{2}$)	4
12	[8, 3, 14]($\sqrt{2}$)	1	12	[32, 29, 71]($\sqrt{2}$)	1
13	[16, 22, 1]($\sqrt{2}$)	44	13	[16, 21, 2]($\sqrt{2}$)	21
14	[8, 11, 14]($\sqrt{2}$)		14	[32, 42, 71]($\sqrt{2}$)	1
			15	[32, 29, 17]($\sqrt{2}$)	4
			16	[32, 39, 31]($\sqrt{2}$)	2
			17	[32, 23, 49]($\sqrt{2}$)	1
			18	[16, 13, 14]($\sqrt{2}$)	2
			19	[32, 30, 41]($\sqrt{2}$)	1
			20	[32, 11, 47]($\sqrt{2}$)	1
			21	[8, 9, 4]($\sqrt{2}$)	5
			22	[32, 44, 7]($\sqrt{2}$)	12
			23	[4, 5, 8]($\sqrt{2}$)	1
			24	[32, 24, 23]($\sqrt{2}$)	3
			25	[32, 45, 1]($\sqrt{2}$)	90
			26	[32, 45, 23]($\sqrt{2}$)	

表 6: $\dfrac{\sqrt{2}}{2^7}$ の連分数展開

$n \setminus \alpha_n$	$[A,B,C](\sqrt{M})$	$[\alpha_n]$	$n \setminus \alpha_n$	$[A,B,C](\sqrt{M})$	$[\alpha_n]$
0	[1, 0, 128]($\sqrt{2}$)	0			
1	[64, 0, 1]($\sqrt{2}$)	90	26	[64, 90, 23]($\sqrt{2}$)	7
2	[32, 45, 46]($\sqrt{2}$)	1	27	[64, 71, 137]($\sqrt{2}$)	1
3	[64, 2, 89]($\sqrt{2}$)	1	28	[32, 33, 14]($\sqrt{2}$)	5
4	[64, 87, 7]($\sqrt{2}$)	25	29	[64, 74, 97]($\sqrt{2}$)	1
5	[8, 11, 8]($\sqrt{2}$)	2	30	[64, 23, 79]($\sqrt{2}$)	1
6	[64, 40, 103]($\sqrt{2}$)	1	31	[8, 7, 8]($\sqrt{2}$)	2
7	[64, 63, 41]($\sqrt{2}$)	3	32	[64, 72, 47]($\sqrt{2}$)	3
8	[16, 15, 28]($\sqrt{2}$)	1	33	[64, 69, 73]($\sqrt{2}$)	2
9	[64, 52, 49]($\sqrt{2}$)	2	34	[64, 77, 31]($\sqrt{2}$)	5
10	[32, 23, 62]($\sqrt{2}$)	1	35	[32, 39, 34]($\sqrt{2}$)	2
11	[64, 78, 17]($\sqrt{2}$)	9	36	[64, 58, 71]($\sqrt{2}$)	2
12	[64, 75, 151]($\sqrt{2}$)	1	37	[16, 21, 4]($\sqrt{2}$)	10
13	[16, 19, 4]($\sqrt{2}$)	10	38	[64, 76, 151]($\sqrt{2}$)	1
14	[64, 84, 71]($\sqrt{2}$)	2	39	[64, 75, 17]($\sqrt{2}$)	9
15	[32, 29, 34]($\sqrt{2}$)	2	40	[32, 39, 62]($\sqrt{2}$)	1
16	[64, 78, 31]($\sqrt{2}$)	5	41	[64, 46, 49]($\sqrt{2}$)	2
17	[64, 77, 73]($\sqrt{2}$)	2	42	[16, 13, 28]($\sqrt{2}$)	1
18	[64, 69, 47]($\sqrt{2}$)	3	43	[64, 60, 41]($\sqrt{2}$)	3
19	[8, 9, 8]($\sqrt{2}$)	2	44	[64, 63, 103]($\sqrt{2}$)	1
20	[64, 56, 79]($\sqrt{2}$)	1	45	[8, 5, 8]($\sqrt{2}$)	2
21	[64, 23, 97]($\sqrt{2}$)	1	46	[64, 88, 7]($\sqrt{2}$)	25
22	[32, 37, 14]($\sqrt{2}$)	5	47	[64, 87, 89]($\sqrt{2}$)	1
23	[64, 66, 137]($\sqrt{2}$)	1	48	[32, 1, 46]($\sqrt{2}$)	1
24	[64, 71, 23]($\sqrt{2}$)	7	49	[64, 90, 1]($\sqrt{2}$)	180
25	[32, 45, 2]($\sqrt{2}$)	45	50	[32, 45, 46]($\sqrt{2}$)	

3.4　ひげ 1 , 周期 1 をもつ $\dfrac{A\sqrt{2}+B}{C}$ の表

表 7: ひげ 1 、周期 1 をもつ $\frac{A\sqrt{2}+B}{C}$

$n \setminus \alpha_n$	$[A,B,C](\sqrt{M})$	$[\alpha_n]$	$n \setminus \alpha_n$	$[A,B,C](\sqrt{M})$	$[\alpha_n]$
0	$[1, 0, 1](\sqrt{2})$	1	0	$[5, 0, 1](\sqrt{2})$	7
1	$[1, 1, 1](\sqrt{2})$	2	1	$[5, 7, 1](\sqrt{2})$	14
2	$[1, 1, 1](\sqrt{2})$		2	$[5, 7, 1](\sqrt{2})$	
0	$[29, 0, 1](\sqrt{2})$	41	0	$[169, 0, 1](\sqrt{2})$	239
1	$[29, 41, 1](\sqrt{2})$	82	1	$[169, 239, 1](\sqrt{2})$	478
2	$[29, 41, 1](\sqrt{2})$		2	$[169, 239, 1](\sqrt{2})$	
0	$[985, 0, 1](\sqrt{2})$	1393	0	$[5741, 0, 1](\sqrt{2})$	8119
1	$[985, 1393, 1](\sqrt{2})$	2786	1	$[5741, 8119, 1](\sqrt{2})$	16238
2	$[985, 1393, 1](\sqrt{2})$		2	$[5741, 8119, 1](\sqrt{2})$	
0	$[33461, 0, 1](\sqrt{2})$	47321	0	$[33461, 0, 1](\sqrt{2})$	275807
1	$[33461, 47321, 1](\sqrt{2})$	94642	1	$[195025, 275807, 1](\sqrt{2})$	551614
2	$[33461, 47321, 1](\sqrt{2})$		2	$[195025, 275807, 1](\sqrt{2})$	

$A = 1, 5, 29, 169, 985, 5741, 33461$,　$B = 0$,
$C = 1$〜$51, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192$ の範囲を計算し、周期についてまとめた。

表 8: $\dfrac{A\sqrt{2}}{C}$ の周期

$C \setminus A$	1	5	29	169	985	5741	33461
$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$	$\underline{1}$
$\underline{2}$		$\underline{3}$	$\underline{3}$	$\underline{3}$	$\underline{3}$	$\underline{3}$	$\underline{3}$
$\underline{3}$		$\underline{8}$	$\underline{8}$	$\underline{8}$	$\underline{8}$	$\underline{8}$	$\underline{8}$
$\underline{4}$		$\underline{6}$	$\underline{6}$	$\underline{6}$	$\underline{6}$	$\underline{6}$	$\underline{6}$
5		1	11	9	5	9	11
$\underline{6}$		$\underline{12}$	$\underline{12}$	$\underline{12}$	$\underline{12}$	$\underline{12}$	$\underline{12}$
7		2	18	14	2	18	14
$\underline{8}$			$\underline{16}$	$\underline{16}$	$\underline{16}$	$\underline{16}$	$\underline{16}$
9			36	36	12	36	36
10			9	11	3	11	9
11			44	44	12	44	44
12			16	12	12	16	16
13			33	5	33	31	29
14			22	22	6	22	22
15			48	44	16	44	48
$\underline{16}$			$\underline{32}$	$\underline{32}$	$\underline{32}$	$\underline{32}$	$\underline{32}$
17			28	24	28	32	32
18			48	48	16	48	48
19			8	84	84	84	84
20			26	26	10	26	26
21			36	40	8	48	40
22			48	48	12	48	48
23			102	98	98	2	98
24			16	12	12	16	16
25			21	67	7	67	69
26			39	3	39	33	31
27			144	144	12	144	144
28			26	30	6	22	18
29			1	23	21	23	25
30			52	52	16	52	52
31			22	142	46	138	134
$\underline{32}$			$\underline{80}$	$\underline{80}$	$\underline{80}$	$\underline{80}$	$\underline{80}$
33			44	44	12	44	44
34			40	32	32	32	32
35			26	26	6	26	22

表 9: $\dfrac{A\sqrt{2}}{C}$ の周期

$C \setminus A$	1	5	29	169	985	5741	33461
36			48	52	20	48	48
37			89	107	93	91	8
38			16	96	96	96	96
39			136	16	136	136	136
40			60	60	20	60	60
41			2	46	42	38	38
42				142	16	60	60
43				220	220	16	220
44				142	16	56	60
45				56	16	56	60
46				110	102	6	106
47				238	238	234	234
48				32	32	40	40
49				22	46	190	186
50				89	5	89	87
51				32	32	28	32
·							
·							
64				176	176	176	176
·							
128				392	392	392	392
·							
256					832	832	832
·							
512					1856	1856	1856
·							
1024					4016	4016	4016
·							
2048						8616	8616
·							
4096						18312	18312
·							
8192							39184

4　考察

4.1　$\dfrac{\sqrt{2}}{2^n},\ 2^{n-1}\sqrt{2}$ （$n \in \mathbb{N}$）の連分数展開の周期の一致

$\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2^n}$
$0 < \sqrt{2} < 2^n$ より、 $0 < \frac{\sqrt{2}}{2^n} < 1$
よって、 $N_1 = [\alpha] = 0$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{2}}{2^n} - 0} = \frac{2^n}{\sqrt{2}} = \frac{2^n\sqrt{2}}{2} = 2^{n-1}\sqrt{2}$$

従って、$\dfrac{\sqrt{2}}{2^n},\ 2^{n-1}\sqrt{2}$ （$n \in \mathbb{N}$）の連分数展開の周期が一致する。

一般化した。

- $\dfrac{\sqrt{M}}{M^n},\ M^{n-1}\sqrt{M}$ （$M, n \in \mathbb{N}$) の連分数展開の周期の一致。
  $\alpha = \dfrac{\sqrt{M}}{M^n}$
  $0 < \sqrt{M} < M^n$ なので、 $0 < \frac{\sqrt{M}}{M^n} < 1$
  よって、 $N_1 = [\frac{\sqrt{M}}{M^n}] = 0$

  $$\alpha_1 = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{M}}{M^n} - 0} = \frac{M^n}{\sqrt{M}} = \frac{M^n\sqrt{M}}{M} = M^{n-1}\sqrt{M}$$

  従って、$\dfrac{\sqrt{M}}{M^n},\ M^{n-1}\sqrt{M}$ （$M, n \in \mathbb{N}$）の連分数展開の周期が一致する。

- $\dfrac{\sqrt{M}}{Mn},\ n\sqrt{M}$ （$M, n \in \mathbb{N}$) の連分数展開の周期の一致。
  $\alpha = \dfrac{\sqrt{M}}{Mn}$
  $0 < \sqrt{M} < Mn$ より、 $0 < \frac{\sqrt{M}}{Mn} < 1$
  よって、 $N_1 = [\frac{\sqrt{M}}{Mn}] = 0$

  $$\alpha_1 = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{M}}{Mn} - 0} = \frac{Mn}{\sqrt{M}} = \frac{Mn\sqrt{M}}{M} = n\sqrt{M}$$

  従って、$\dfrac{\sqrt{M}}{Mn},\ n\sqrt{M}$ （$M, n \in \mathbb{N}$）の連分数展開は、周期が一致する。

4.2　ひげ１、周期１をもつ $A\sqrt{2}$

4.2.1　ひげ１、周期１の

$\alpha = A\sqrt{2} = \sqrt{2},\ 5\sqrt{2},\ 29\sqrt{2}$ の連分数展開の周期が 1 であることが調べた表から分かる。なぜそうなるのか $\alpha = A\sqrt{2}$ 数学的にもとめる。
$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha - N_1}$ の右辺を有理化したときに分母が、$\alpha^2 - N_1^2 = 1\ \cdots(1)$ となることによるものだと分かった。
$N_1 = [\alpha]$
$\alpha_1 = \frac{\alpha + N_1}{\alpha^2 - N_1^2} = \alpha + N_1 \qquad (\because（1）)$
$N_2 = [\alpha_1] = [\alpha_1 + N_1] = 2N_1$
$(\because \quad [N_1 + N_1] < \alpha_1 + N_1 < [(N_1 + 1) + N_1]$
$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha + N_1 - 2N_1} = \frac{1}{\alpha - N_1} = \alpha_1$
よって、α は周期 1 となることがわかった。
$\alpha = x\sqrt{2},\ N_1 = y$ と置き換える。
$2x^2 - y^2 = 1$ を満たす $x\sqrt{2}$ の連分数展開の周期は 1 である。
$n^2 - 2m^2 = -1$ （Pell 方程式 参照）を満たす、n, m は次のように求められることが知られている。（昨年度の鶴見さんの論文を参照）

1. $n = 1, \underline{m = 1}$ は解。
   $(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = -1$

2. $(1 - \sqrt{2})^3 = 7 - 5\sqrt{2}$
   $(7 - 5\sqrt{2})(7 + 5\sqrt{2}) = -1$
   $n = 7, \underline{m = 5}$

3. $(1 - \sqrt{2})^5 = 42 - 29\sqrt{2}$
   $(42 - 29\sqrt{2})(42 + 29\sqrt{2}) = -1$
   $n = 41, \underline{m = 29}$

4. $(1 - \sqrt{2})^7 = 239 - 169\sqrt{2}$
   $(239 - 1692)(239 + 169\sqrt{2}) = -1$
   $n = 239, \underline{m = 169}$

$2x^2 - y^2 = 1$ でもこれを満たすので、x について、x について調べる。

$(\sqrt{2} - 1)^{2k-1} = x_k\sqrt{2} - y_k \quad \cdots\ (2)$
$(\sqrt{2} + 1)^{2k-1} = x_k\sqrt{2} + y_k \quad \cdots\ (3)$

(2),(3) より、
$2x_k\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^{2k-1} + (\sqrt{2} + 1)^{2k-1}$

$$x_k = \frac{(\sqrt{2} - 1)^{2k-1} + (\sqrt{2} + 1)^{2k-1}}{2\sqrt{2}}$$

よって、

$$\alpha = x_k\sqrt{2} = \frac{(\sqrt{2} - 1)^{2k-1} + (\sqrt{2} + 1)^{2k-1}}{2}$$

従って、求めたいひげ 1 , 周期 1 を持つ $\alpha = A\sqrt{2}$ がわかった。
これをまとめるにあたり澤野氏から助言をうけた。

4.2.2 $\dfrac{A\sqrt{2}}{C}$ の連分数展開の周期の一致

$\beta=\dfrac{A\sqrt{2}}{C}$ とする。$A=1,5,29,169,985,5741,33461$ のときの分母 C を 1 から 51 の範囲で計算した。分母 C が分子 $A\sqrt{2}$ より大きくなったときを除き周期について調べたところ、次のような C のとき周期が A によらずすべて等しいことが分かった。（表８，９ 参照）
$C=1,2,3,4,6,8=2^3,16=2^4,32=2^5,64=2^6,128=2^7,256=2^8,512=2^9,1024=2^{10},2048=2^{11},4096=2^{12}$ のときに、$\frac{A\sqrt{2}}{C}$ の連分数展開の周期は A によらず一致する。（表１０ 参照）

$A=1,5,29,169,985,5741,33461$ のとき、分母 C が分子 $A\sqrt{2}$ より大きくなったときを除く $\beta=\dfrac{A\sqrt{2}}{C}$ の連分数展開の周期について、周期の一致を確認できるのは C が 1 から 8119（$\because$ $8119<5741\sqrt{2}<8120$）の範囲である。このことから、分母 C が 2^n $(n=0,1,2,...,12)$ のときに $\frac{A\sqrt{2}}{C}$ （$A=1,5,29,169,985,5741,33461$）の連分数展開の周期が A によらず一致することは表から示された。

これをさらに拡張し、$\gamma=\dfrac{(\sqrt{2}-1)^{2k-1}+(\sqrt{2}+1)^{2k-1}}{2}$, $(k=1,2,....)$ のとき、$\gamma=\dfrac{A\sqrt{2}}{C}$ は、分母 C が２のべきのとき、γ の連分数展開の周期が一致する。というのと、C が $2^n(n=0,1,2,...)$ のときに綺麗に周期が一致しているので、周期の値に規則性があり、計算により出すことが出来ると２つの予想を立てた。
が、これは次年度の人に解いてもらえると幸いです。

表 10: $\dfrac{A\sqrt{2}}{C}$ の周期

$C\setminus A$	1	5	29	169	985	5741	33461
1	1	1	1	1	1	1	1
2		3	3	3	3	3	3
3		8	8	8	8	8	8
4		6	6	6	6	6	6
6		12	12	12	12	12	12
8			16	16	16	16	16
16			32	32	32	32	32
32			80	80	80	80	80
64				176	176	176	176
128				392	392	392	392
256					832	832	832
512					1856	1856	1856
1024					4016	4016	4016
2048						8616	8616
4096						18312	18312

5 感想

prolog は、授業で習ったＣ言語と全く違うプログラミング言語で、Ｃ言語ならある fot 文などがなく、自分で組み込まなければいきませんでした。最初は面倒だと思いながらも打ち込んでいましたが、だんだん慣れてくると prolog も面白くなってきました。prolog の良いところは、一度組み込んでおけばまた書く必要がないという点と、面倒ではありながらも自由度が高いという点です。課題研究をする際に能力さえあれば、思った通りのプログラムが組める素晴らしいものだと思います。prolog の感想はここまでとして、次は課題研究の感想を書こうと思います。研究をしていて何度も思ったことは、「だから何？」です。いろいろ調べてやっとのことで見つけた性質でも、漠然としていて自分ではすごいんだかすごくないんだかか判断できないことが多々有りました。沢山性質を見つけても証明までいたらないことが多々有り予想止まりばかりです。参考文献や先輩方の論文を読まずに進めたばかりに、既にやられていたことを知らずに発見したことに喜んでたりもしていました。でも、後で飯高教授に「それは既に見つけられたものです」のようなことを言われたときは、また探さないと思いながらため息をついたことえを覚えています。苦労しながらもちゃんと発表までこぎつけられたので、今は満足しています。話は変わりますが、この論文を作る際に使った TeX についてですが、本当に大変でした。とにかく大変でした。一番苦労したと言っても過言ではないと思っています。それだけですが、最後に、飯高ゼミのみんなと教授と院生の方々に感謝の言葉を述べて感想を終わりにしたいと思います。
この四年生最後の年を皆さんと共有できて本当によかったです。ありがとうございました。