z

分母が$3P$である分数の小数展開の循環節の研究 7進数と10進数の場合

岩楯佐知子
学習院大学理学部数学科

$\dfrac{1}{7} = 0.142857142857...$ となる.

つまり142857が繰り返し表れる.

これは循環小数となり，$0.\dot{1}4285\dot{7}$ とかける.

また，[1,4,2,8,5,7]を循環節という.

２分割し足すと，

[1,4,2]+[8,5,7]=[9,9,9]

このように循環小数を分割していくとある規則性が現れる.

$\boxed{\text{私の研究テーマ}}$

分母が$3p$(pは3より大の素数で10又は7進数と互いに素)のとき，

$\frac{a}{3p}$を10進数又は7進数として展開したの2分割和の性質について

Table 1. (例)10 進数の場合

$\frac{a}{3*7}$ の a の値	循環節	2 分割和	乗数
1	[0,4,7, 6,1,9]	[6, 6, 6]	2
2	[0,9,5, 2,3,8]	[3, 3, 3]	1
4	[1, 9, 0, 4, 7, 6]	[6, 6, 6]	2
5	[2, 3, 8, 0, 9, 5]	[3, 3, 3]	1
8	[3, 8, 0, 9, 5, 2]	[1, 3, 3, 2]	4
10	[4, 7, 6, 1, 9, 0]	[6, 6, 6]	2
11	[5, 2, 3, 8, 0, 9]	[1, 3, 3, 2]	4
13	[6, 1, 9, 0, 4, 7]	[6, 6, 6]	2
16	[7, 6, 1, 9, 0, 4]	[1, 6, 6, 5]	5
17	[8, 0, 9, 5, 2, 3]	[1, 3, 3, 2]	4
19	[9, 0, 4, 7, 6, 1]	[1, 6, 6, 5]	5
20	[9, 5, 2, 3, 8, 0]	[1, 3, 3, 2]	4

$\boxed{\text{このとき10進数と7進数の共通・性質}}$

１．乗数が1から始まる場合と2から始まる場合の２通りがある

２．乗数が1から始まるものののpを調べると$p \equiv 5(\mathrm{mod}6)$となる

(例):7 進数の場合　$p = 13, 43$　　10 進数の場合　$p = 3, 13, 19$

３．乗数が2から始まるものののpを調べると$p \equiv 1(\mathrm{mod}6)$となる

(例):7 進数,10 進数の場合　$p = 11, 17, 23, 29, 41, 47$

４．10進数と7進数のpが共通の場合，乗数が共通する

Table 2. 7進数の場合

$\frac{a}{3*11}$ の a の値	循環節	２分割和	乗数
1	[0,3]	[3]	1
2	[0,6]	[6]	2
4	[1,2]	[3]	1
5	[1,5]	[6]	2
7	[2,1]	[3]	1
8	[2,4]	[6]	2
10	[3,0]	[3]	1
13	[3,9]	[1,2]	4
14	[4,2]	[6]	2
16	[4,8]	[1,2]	4
17	[5,1]	[1,5]	2
19	[5,7]	[1,2]	4
20	[6,0]	[6]	2
23	[6,9]	[1,5]	5

Table 3. 10 進数と 7 進数の p が共通の場合，乗数が共通する $\frac{a}{3*11}$ のとき

10 進数 a の値	乗数	7 進数 a の値	乗数
1	1	1	1
2	2	2	2
4	1	4	1
5	2	5	2
7	1	7	1
8	2	8	2
10	1	10	1
13	4	13	4
14	2	14	2
16	4	16	4
17	2	17	2
19	4	19	4
20	2	20	2
23	5	23	5
25	4	25	4
26	5	26	5
28	4	28	4
29	5	29	5
31	4	31	4
32	5	32	5

Table 4. 10 進数と 7 進数の p が共通の場合，乗数が共通する　$\frac{a}{3*13}$ のとき

10 進数 a の値	乗数	7 進数 a の値	乗数
1	2	1	2
2	1	2	1
4	2	4	2
5	1	5	1
7	2	7	2
8	1	8	1
10	2	10	2
11	1	11	1
14	4	14	4
16	2	16	2
17	4	17	4
19	2	19	2
20	4	20	4
22	2	22	2
23	4	23	4
25	2	25	2
28	5	28	5
29	4	29	4
31	5	31	5
32	4	32	4
34	5	34	5
35	4	35	4
37	5	37	5
38	4	38	4

TABLE 5. 10 進数と 7 進数の p が共通の場合，乗数が共通する $\frac{a}{3*17}$ のとき

10 進数 a の値	乗数	7 進数 a の値	乗数
1	1	1	1
2	2	2	2
4	1	4	1
5	2	5	2
7	1	7	1
8	2	8	2
10	1	10	1
11	2	11	2
13	1	13	1
14	2	14	2
16	1	16	1
19	4	19	4
20	2	20	2
22	1	22	4
23	2	23	2
25	4	25	4
26	2	26	2
28	4	28	4
29	2	29	2
31	4	31	4
32	2	32	2
35	5	35	5
37	4	37	4
38	5	38	5
40	4	40	4
41	5	41	5
43	4	43	4
44	5	44	5
46	4	46	4
47	5	47	5
49	4	49	4
50	5	50	5

TABLE 6. 10 進数と 7 進数の p が共通の場合，乗数が共通する $\frac{a}{3*23}$ のとき

10 進数 a の値	乗数	7 進数 a の値	乗数
1	1	1	1
2	2	2	2
4	1	4	1
5	2	5	2
7	1	7	1
8	2	8	2
10	1	10	1
11	2	11	2
13	1	13	1
14	2	14	2
16	1	16	1
17	2	17	2
19	1	19	1
20	2	20	2
22	1	22	1
25	4	25	4
26	2	26	2
28	4	28	4
29	2	29	2
31	4	31	4
32	2	32	2
34	4	34	4
35	2	35	2
37	4	37	4
38	2	38	2
40	4	40	4
41	2	41	2
43	4	43	4
44	2	44	2
47	5	47	5
49	4	49	4
50	5	50	5
52	4	52	4
53	5	53	5
55	4	55	4
56	5	56	5
58	4	58	4
59	5	59	5
61	4	61	4

TABLE 7. 10 進数の場合，a=1 のとき，乗数が 1 と 2，どちらかがでてくる

分子 a	2 分割和	乗数
$\frac{a}{3*7}$		
1	[6, 6, 6]	2
2	[3, 3, 3]	1
$\frac{a}{3*13}$		
1	[6, 6, 6]	2
2	[3, 3, 3]	1
$\frac{a}{3*17}$		
1	[3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3]	1
2	[6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6]	2
$\frac{a}{3*19}$		
1	[6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6]	2
2	[3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3]	1

１． 乗数が1から始まる場合と2から始まる場合の２通りがある

Table 8. 10 進数の場合

$\frac{a}{3*23}$		
1	$[3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3]$	1
2	$[6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6]$	2
$\frac{a}{3*29}$		
1	$[3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3]$	1
2	$[6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6]$	2
$\frac{a}{3*47}$		
1	$[3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3]$	1
2	$[6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6]$	2

TABLE 9. 7進数の場合

$\frac{a}{3*11}$		
1	[3]	1
2	[6]	2
$\frac{a}{3*13}$		
1	[6, 6, 6]	2
2	[3, 3, 3]	1
$\frac{a}{3*17}$		
1	[3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3]	1
2	[6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6]	2

Table 10. 7進数の場合

$\frac{a}{23}$		
1	[3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3]	1
2	[6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6]	2
$\frac{a}{3*41}$		
1	[2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2]	1
2	[4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4]	2
$\frac{a}{3*43}$		
1	[4, 4, 4]	2
2	[2, 2, 2]	1

1. 証明

循環節の展開の性質を調べる.

$$\begin{cases} ga = q_1 b + r_1 \\ gr_1 = q_2 b + r_2 \quad * \\ \vdots \\ gr_{u-1} = q_u b + r_u \end{cases}$$

$r_j \equiv g^j a (\mathrm{mod}\ b)$ となる
循環すると $r_u = a$ となる
$*$ より $r_1 \equiv ag\ (\mathrm{mod} b)$
$r_2 \equiv ag^2\ (\mathrm{mod} b)$ より
$r_j \equiv g^j a (\mathrm{mod}\ p)$
$r_u \equiv g^u a (\mathrm{mod}\ p)$
また, $a \equiv g^u a$ より
$r_u = a$ となるので $g^u \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p)$ となる
ここで u は偶数 $2m$ とする. すなわち,
$g^u \equiv 1 (\mathrm{mod} p)$
$g^{2m} \equiv 1 \quad (\mathrm{mod}\ p)$ となる
p が素数なので $g^m \equiv -1 (\mathrm{mod}\ p)$ となる
$r_j + r_{j+m} \equiv g^j a + g^{j+m} a \equiv a(g^j + g^{j+m}) \equiv a(g^j + g^j g^m) \equiv a(g^j - g^j) \equiv 0 (\mathrm{mod}\ p)$
なので $r_j + r_{j+m}$ は p の倍数
よって $r_j + r_{j+m} \equiv k_j p$ となる k_j がある.

この k_j を乗数 (multiplier) という.

分子 $\frac{a}{3p}$ の乗数について証明する

以後 $b = 3p$ とすると
分子 $\frac{a}{3p}$ について
$(p \leq 7)$
$r_j < b = 3p$

$r_{j+m} < b = 3p$ を満たすので
$r_j + r_{j+m} < 6p$

これより $k_j p < 6p$ を満たすので
$k_j = 1, 2, 3, 4, 5$
乗数は $1, 2, 3, 4, 5$ であることがいえた

次に相補性について証明する

$$r_j + r_{j'} = b = 3p$$

$$r_{j+m} + r_{j'+m} = b = 3p$$

によって$r_j + r_{j'} + r_{j+m} + r_{j'+m} = 6p$

$r_j + r_{j+m} = k_j r_j \; r_j + r_{j+m} = k_j * p$により

$$p(k_j + k_{j'}) = 6p$$

よって$\boxed{k_j + k_{j'} = 6}$

これが$\frac{a}{3p}$の２分割の相補性である.

相補性を使って乗数がいくつになるかを以下で調べる．

分子 r_j の次の分子 r_j+1 が r_l とかけるとする．
$r_j + r_{j+m} = k_j p, \quad r_l + r_{l+m} = k_l p$ となる $k_j p$,$k_l p$ がある

全体を(mod3)で考えると
$g \equiv 1(\mathrm{mod}3)(g = 10$ または$7)$

$$r_{j+m} \equiv ag^{j+m} \equiv ag^j g^m \equiv r_j g^m \pmod 3$$

となるので $g^m \equiv 1(\mathrm{mod}3)$

よって $\boxed{r_{j+m} \equiv r_j(\mathrm{mod}3)}$

$r_j + r_{j+m} \equiv 2r_j \equiv k_j p(\mathrm{mod}3)$
同様にして $r_l + r_{l+m} \equiv 2r_l \equiv k_l p(\mathrm{mod}3)$

よって $2r_j \equiv_j p \pmod 3$

$2r_l \equiv k_l p \pmod 3$

しかも $r_l = r_j + 1$ なので

$2(r_j + 1) \equiv k_l p \pmod 3$

$2k_j + 2 \equiv k_l p \pmod 3$

$2r_j \equiv k_j p \pmod 3$ より

$k_j p + 2 \equiv k_l p (\mathrm{mod} 3)$

つまり k_l は次の分子の乗数である．

$2 \equiv (k_l - k_j)p$ 　ここで p は $r_l = r_j + 1$ なので3でない素数

よって p を3で割った余りを考える．

$a. \quad p \equiv 1 \pmod{3} \quad k_l \equiv 2 + k_j (\mathrm{mod} 3)$

$b. \quad p \equiv 2 \pmod{3} \quad k_j \equiv 1 + k_l (\mathrm{mod} 3)$

つまり， (mod3) でみると乗数は2を足すか1を足すかである．

たとえば10進数でpが$p \equiv 1 (\mathrm{mod} 6) b = 3p$ (たとえば，$p = 7$) のとき，
$r_j = 1$として最初の乗数k_jを求める

$r_j + r_{j+m} = k_j p$ 相補性 より
$1 + r_{j+m} = k_j p \leq b - 1 = 3p - 1$

ここから$1 + r_{j+m} = p$または$2p$なので$r_{j+m} = p - 1$または$2p - 1$がわかる

もし$r_{j+m} = p - 1$なら$r_{j+m} = p - 2 = p - 1 - 1 \equiv 2 \pmod 3$

$r_{j+m} \equiv r_j (\mathrm{mod} 3)$ より
$r_{j+m} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 3)$

となり矛盾する
よって $r_{j+m} = 2p - 1$ となる

乗数は $r_j + r_{j+m} = 1 + 2p - 1 = 2p$ により
$k_j = 2$

つまり分子が1のとき乗数は2である．

たとえば10進数でpが$p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 6) b = 3p$ (たとえば，$p = 7$) のとき，$r_l = 2$として最初の乗数k_lを求める

$r_l + r_{l+m} = k_l p$ 相補性より
$2 + r_{l+m} = k_l p \leq b - 1 = 3p - 1$

ここから$2 + r_{l+m} = p$または$2p$なので$r_{l+m} = p - 2$または$2p - 2$がわかる

もし$r_{l+m} = 2p - 2$なら$r_{l+m} = 2p - 2 = 2p - 1 - 1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 3)$

$r_{l+m} \equiv r_l (\mathrm{mod}\ 3)$ より
$r_{l+m} \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 3)$

となり矛盾する

$r_{l+m} = p - 2$となる

よって乗数は $r_l + r_{l+m} = 2 + p - 2 = p$により
$k_l = 1$

つまり分子が2のとき乗数は1である

TABLE 11. 10進数の $\frac{a}{3*7}$

aの値	循環節	２分割	乗数
1	0, 4, 7, 6, 1, 9	6, 6, 6	2
2	0, 9, 5, 2, 3, 8	3, 3, 3	1
4	1, 9, 0, 4, 7, 6	6, 6, 6	2
5	2, 3, 8, 0, 9, 5	3, 3, 3	1
8	3, 8, 0, 9, 5, 2	1, 3, 3, 2	4
10	4, 7, 6, 1, 9, 0	6, 6, 6	2
11	5, 2, 3, 8, 0, 9	1, 3, 3, 2	4
13	6, 1, 9, 0, 4, 7	6, 6, 6	2
16	7, 6, 1, 9, 0, 4	1, 6, 6, 5	5
17	8, 0, 9, 5, 2, 3	1, 3, 3, 2	4
19	9, 0, 4, 7, 6, 1	1, 6, 6, 5	5
20	9, 5, 2, 3, 8, 0	1, 3, 3, 2	4

2. 今後の課題

7進数と10進数の表より，乗数が2, 1, 2, 1または2, 1, 2, 1の順で並ぶ際に1または2の数が奇数個の場合の規則性についてさらに深く学びたいと考えている.