分数 $\dfrac{a}{b}(b=2p,4p)$ の 5 進小数展開の循環節の分割和について

小山 友果理

平成 24 年 2 月 2 日

目 次

1 目的

まず例として、$\frac{1}{7}$ の 10 進数での小数展開を考える.

$$\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$$

つまり、[142857] が循環節となる.

この節を二分割して足し合わせると、$[142] + [857] = [999]$ となる.

このように一般に素数 p について、分数 $\frac{1}{p}$ を小数展開し、循環節の長さが偶数のとき、二分割して和を求めると 9 が並ぶ形となる.(Goodwyn 1802)

今回は、200 以下の素数 p について、既約分数 $\frac{a}{2p},(1 \leq a < 2p)$ と、既約分数 $\frac{a}{4p}, 1 \leq a < 4p$ を、それぞれ 5 進数として小数展開したときの、二分割和の性質について考える.

2 方法

`swi-prolog` を用いる。

エラトスの篩で、200 以下の素数を表示させる。

```
as_c(J):- ifthen(\+ c(J),asserta(c(J))).


/*素数の列*/
:-dynamic c/1.
eratos(Up):-abolish(c/1),
write('2,'),
asserta(c(2)),
for_step(3=< Up,I,2),
\+ c(I),
write(I),write(','),
From is I*3,
Step is 2*I,
for_step(From =< Up,J,Step),
as_c(J),
fail.
eratos(_).

for_step(I=<J,I,_):-I =<J.
for_step(I =<J,K,Step):- I =<  J,T1 is I+ Step,
for_step(T1 =< J,K,Step).
```

```
ifthen(P,Q):- (P -> Q;fail).
ifthenelse(P,Q,R):- P -> Q;R.
```

/*7 から 200 までの素数を primebox として作る*/

```
primebox([7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97,101,103,107,109,113,12
```

$\frac{A}{B}$ を $A = B * Q + R$ の形になおす.

/*商と余り*/

```
res_q(A=B*Q+R):-Q is floor(A/B),R is A - B*Q.
```

/*最大公約数*/

```
gcd(A=(A,0)):-!.
gcd(D=(A,B)):- B1 is A mod B,A1 = B,
gcd(D=(A1,B1)).

for(I=<J,I):- I =< J.
for(I=<J,K):-I=<J,
I1 is I+1,for(I1=<J,K).
```

/*リストの結合と分離*/

```
append0(Z=[]+Z).
append0([A|Z]=[A|X]+Y):-append0(Z=X+Y).

?- append0([1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]=A+B).
```

を用いて、リストの中身をすべて表示することができる。

/*G 進数での循環節をまとめる*/

```
j(A/B,G):-A<B,j_aux([A/B,G],A,0).
```

/*A,B,G をまとめてくくる*/

```
j_aux([A/_,_],A,R):- R>0.
j_aux(Const,A0,_):-
Const=[_/B,G],
A1 is A0 * G,
res_q(A1 = B*Q + R1),
write(Q),tab(1),
j_aux(Const,R1,R1).
```

/*分数を G 進数で循環節に直した時のリストの長さを求める*/

```
jl(A,B,G,List,SS):-1<B,
  jl_aux([A/B,G],A,0,[],List),length(List,SS),!.

jl_aux([A/_,_],A,R,L,L):-R>0,!.

jl_aux(Const,A0,_,L,W):-Const = [_/B,G],
A1 is A0 * G,
res_q(A1 = B * Q +R1),
append0(L1 = L +[Q]),
jl_aux(Const,R1,R1,L1,W).

/*G 進数を 10 進数で示す*/
g_ten(N,[N],G):-N<G.

g_ten(X,L,G):-append0(L=N+[R]),
g_ten(Y,N,G),
X is Y*G+R.

/*10 進数を G 進数で表し、リストで表記する*/
ten_g(N,[N],G):-N<G.

ten_g(N,L,G):-N1 is N//G,R1 is N mod G,
ten_g(N1,L1,G),
append0(L=L1+[R1]).

/*分割和*/
g_sum(A=B+C,G):-g_ten(X,B,G),
g_ten(Y,C,G),
Z is X+Y,
ten_g(Z,A,G),!.



left(A=[]+A,0):-!.

left(A=B+C,N):-N>0,N1 is N-1,
left(A=B1+[X|C],N1),
append0(B=B1+[X]),!.

/*リストの二分割和*/
nibunnkatsu(L=A+B):-length(L,N),N1 is N//2,
left(L=A+B,N1).
```

```
/*循環節の長さが偶数のとき、二分割和を求める*/
ni(A,B,G,Q):-jl(A,B,G,L,SS),
gcd(D2=(2,SS)),
(   D2==2 -> nibunnkatsu(L=X+Y),
    g_sum(Q=X+Y,G)),write(Q),nl.


/*分母にBを入れたとき、分子Aに1からB-1を入れたときの、二分割和を表記する*/
rekekkan(G,B):-B1 is B - 1,
for(1=<B1,A),
write(A),nl,
ni(A,B,G,_),fail.

rekekkan(_,_):-nl.

/*Bが7から200までの素数の場合の、二分割和を表記する*/
kekkan(G):-primebox(L),
member(B,L),nl,
write(B),nl,
rekekkan(G,B),
read(_),fail.
kekkan(_):-nl.

/*上記のb=2pの場合を表記する*/
kekka2n(G):-primebox(L),
member(B,L),nl,
write(B),nl,
rekekka2n(G,B),
read(_),fail.
kekka2n(_):-nl.

/*b=4pの場合を表記する*/
kekka4n(G):-primebox(L),
member(B,L),nl,
write(B),nl,
rekekka4n(G,B),
read(_),fail.
kekka4n(_):-nl.
```

3　結果

具体例

例

$p=7$ において、$\dfrac{1}{p}, \dfrac{1}{2p}, \dfrac{1}{4p}$ を、それぞれ 5 進数で小数展開する.(以後、循環節ということを省略し書かない.)

$\dfrac{1}{p}$ のとき

$$\frac{1}{7} = 0.\dot{0}3241\dot{2}$$

[0 3 2 4 1 2] を二分割すると [0 3 2] と [4 1 2] となる。
これを足し合わせると、

$$\begin{array}{rr} & 0\ 3\ 2 \\ +) & 4\ 1\ 2 \\ \hline & 4\ 4\ 4 \end{array}$$

よって、$\dfrac{1}{7}$ の 5 進数での二分割和は [4 4 4] となる.

次に $\dfrac{1}{2p}$ の場合

$$\frac{1}{14} = 0.\dot{0}1343\dot{1}$$

[0 1 3 4 3 1] を二分割すると [0 1 3] と [4 3 1] となる.
これを足し合わせると、

$$\begin{array}{rr} & 0\ 1\ 3 \\ +) & 4\ 3\ 1 \\ \hline & 4\ 4\ 4 \end{array}$$

よって、$\dfrac{1}{14}$ の 5 進数での二分割和も [4 4 4] となる.

次に $\dfrac{1}{4p}$ の場合

$$\frac{1}{28} = 0.\dot{0}0421\dot{3}$$

[0 0 4 2 1 3] を二分割すると [0 0 4] と [2 1 3] となる。
これを足し合わせると、

$$\begin{array}{rr} & 0\,0\,4 \\ +) & 2\,1\,3 \\ \hline & 2\,2\,2 \end{array}$$

$4+3=7$ だが、これは５進数のとき 12 になり、1 は繰り上がる.

よって、$\dfrac{1}{28}$ の５進数での二分割和は [2 2 2] となる.

ここで、$\dfrac{15}{28}$ に注目する.

$$\frac{15}{28} = 0.\dot{2}3144\dot{0}$$

[2 3 1 4 4 0] を二分割すると [2 3 1] と [4 4 0] となる。
これを足し合わせると、

$$\begin{array}{rr} & 2\,3\,1 \\ +) & 4\,4\,0 \\ \hline & 1\,2\,2\,1 \end{array}$$

よって、$\dfrac{15}{28}$ の５進数での二分割和は [1 2 2 1] となる.

この [1 2 2 1] という数は、先に出た [2 2 2] を３倍した数である.

表

$\frac{a}{b}, 1 \leq a < b$ を小数展開したとき循環節の長さが 2 の倍数の場合の 5 進展開での二分割和の結果を b が小さいほうから順に表にまとめた.

$b = 2p$(p は素数) のときは、分子が p を除いた任意の a において、同じ結果が出るので、b についての表をまとめた.

p の値	分母 b	5 進数での二分割和	4 の個数
3	6	[4]	1
7	14	[4,4,4]	3
13	26	[4,4]	2
17	34	[4,4,4,4,4,4,4,4]	8
23	46	[4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4]	11
29	58	[4,4,4,4,4,4,4]	7
37	74	[4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4]	18
41	82	[4,4,4,4,4,4,4,4,4,4]	10
43	86	[4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4]	21
47	94	[4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4]	23
53	106	[4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4]	26
61	122	[4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4]	15
67	134	[4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4]	11
73	146	[4,4,4,4,4,4,4,4,4, ⋯ ,4,4,4,4,4,4,4,4,4]	36
83	166	[4,4,4,4,4,4,4,4,4, ⋯ ,4,4,4,4,4,4,4,4,4]	41
89	178	[4,4,4,4,4,4,4,4,4, ⋯ ,4,4,4,4,4,4,4,4,4]	22
97	194	[4,4,4,4,4,4,4,4,4, ⋯ ,4,4,4,4,4,4,4,4,4]	48
103	206	[4,4,4,4,4,4,4,4,4, ⋯ ,4,4,4,4,4,4,4,4,4]	51
107	214	[4,4,4,4,4,4,4,4,4, ⋯ ,4,4,4,4,4,4,4,4,4]	53
113	226	[4,4,4,4,4,4,4,4,4, ⋯ ,4,4,4,4,4,4,4,4,4]	56
127	254	[4,4,4,4,4,4,4,4,4, ⋯ ,4,4,4,4,4,4,4,4,4]	21
137	274	[4,4,4,4,4,4,4,4,4, ⋯ ,4,4,4,4,4,4,4,4,4]	68
157	314	[4,4,4,4,4,4,4,4,4, ⋯ ,4,4,4,4,4,4,4,4,4]	78
163	326	[4,4,4,4,4,4,4,4,4, ⋯ ,4,4,4,4,4,4,4,4,4]	27
167	334	[4,4,4,4,4,4,4,4,4, ⋯ ,4,4,4,4,4,4,4,4,4]	83
173	346	[4,4,4,4,4,4,4,4,4, ⋯ ,4,4,4,4,4,4,4,4,4]	86
193	386	[4,4,4,4,4,4,4,4,4, ⋯ ,4,4,4,4,4,4,4,4,4]	96
197	394	[4,4,4,4,4,4,4,4,4, ⋯ ,4,4,4,4,4,4,4,4,4]	98

$b = 4p$ の場合

$p = 3$ つまり分母 $b = 12$ について、

分子 a	5進数での循環節	5進数での二分割和	乗数
1	[0 2]	[2]	2
5	[2 0]	[2]	2
7	[2 4]	[1,1]	6
11	[4 2]	[1,1]	6

$p = 7$ のとき、分母 $b = 28$

分子 a	5進数での循環節	5進数での二分割和	乗数
1	[0 0 4 2 1 3]	[2,2,2]	2
3	[0 2 3 1 4 4]	[2,2,2]	2
5	[0 4 2 1 3 0]	[2,2,2]	2
9	[1 3 0 0 4 2]	[2,2,2]	2
11	[1 4 4 0 2 3]	[2,2,2]	2
13	[2 1 3 0 0 4]	[2,2,2]	2
15	[2 3 1 4 4 0]	[1,2,2,1]	6
17	[3 0 0 4 2 1]	[1,2,2,1]	6
19	[3 1 4 4 0 2]	[1,2,2,1]	6
23	[4 0 2 3 1 4]	[1,2,2,1]	6
25	[4 2 1 3 0 0]	[1,2,2,1]	6
27	[4 4 0 2 3 1]	[1,2,2,1]	6

$p = 13$ のとき、分母 $b = 52$

分子 a	5 進数での循環節	5 進数での二分割和	乗数
1	[0 0 2 2]	[2,2]	2
3	[0 1 2 1]	[2,2]	2
5	[0 2 2 0]	[2,2]	2
7	[0 3 1 4]	[2,2]	2
9	[0 4 1 3]	[2,2]	2
11	[1 0 1 2]	[2,2]	2
15	[1 2 1 0]	[2,2]	2
17	[1 3 0 4]	[2,2]	2
19	[1 4 0 3]	[2,2]	2
21	[2 0 0 2]	[2,2]	2
23	[2 1 0 1]	[2,2]	2
25	[2 2 0 0]	[2,2]	2
27	[2 2 4 4]	[1,2,1]	6
29	[2 3 4 3]	[1,2,1]	6
31	[2 4 4 2]	[1,2,1]	6
33	[3 0 4 1]	[1,2,1]	6
35	[3 1 4 0]	[1,2,1]	6
37	[3 2 3 4]	[1,2,1]	6
41	[3 4 3 2]	[1,2,1]	6
43	[4 0 3 1]	[1,2,1]	6
45	[4 1 3 0]	[1,2,1]	6
47	[4 2 2 4]	[1,2,1]	6
49	[4 3 2 3]	[1,2,1]	6
51	[4 4 2 2]	[1,2,1]	6

4 考察

$2p$ について

【$b = 2p$ のとき、2 分割和を 5 進数で表記する】
既約分数 $\dfrac{a}{b}$ を $g = 5$ 進数展開する.(p は素数で、$1 \leq a < b$ である)

ga を b で割り、商を q, 余りを r とする.

$$
\begin{aligned}
ga &= q_1 b + r_1 \\
gr_1 &= q_2 b + r_2 \\
&\vdots \\
gr_j &= q_{j+1} b + r_{j+1} \\
&\vdots \\
gr_u &= q_{u+1} b + r_{u+1}
\end{aligned}
$$

これを、mod b でみると、

$$
\begin{aligned}
ga &\equiv r_1, \\
gr_1 &\equiv r_2, \\
g^2 a &\equiv r_2.
\end{aligned}
$$

一般に、

$$g^j a \equiv r_j \ (\mathrm{mod} b)$$

となる.

鳩の巣原理より、$j > i$ で $r_j = r_i$ となる j, i が存在する.

$r_j \equiv g^j a, r_i \equiv g^i a, r_j = r_i$ より、

$$g^j a \equiv g^i a. \tag{1}$$

a と b は互いに素なので、gcd(a,b)=1 を満たす.

よって、ユークリッドの互除法により、$x, y \in \mathbf{Z}$ があって、

$$1 = ax + by \tag{2}$$

となる.
式 (2) を b を法としてみると、

$$1 \equiv ax \bmod b$$

となる.

x を式 (1) の両辺にかけて、

$$\begin{aligned} g^j ax &\equiv g^i ax, \\ g^j &\equiv g^i. \end{aligned}$$

g と b は互いに素なので、$1 = gs + bt$ となる $s, t \in \mathbf{Z}$ が存在する.

$$\begin{aligned} 1 &\equiv gs \bmod b \\ s &\equiv g^{-1} \\ g^j s^i &\equiv g^i s^i \\ g^j g^{-i} &\equiv (gs)^i \\ g^{j-i} &\equiv 1 \end{aligned}$$

$u = j - i$ とおく

$$g^u \equiv 1$$

この u が最小の自然数のとき周期といい、
つまり u は g の mod b での位数ということができる.

周期は u なので

$$r_u \equiv g^u a \equiv a \pmod{b}$$

$a < b$ かつ $r_u < b$ より、

$$r_u = a$$

である.

$g^u \equiv 1 \pmod b), b = 2p$ より、2 と p は互いに素なので

$$\begin{cases} g^u \equiv 1 \bmod 2 \\ g^u \equiv 1 \bmod p \end{cases}$$

循環節の長さ、すなわち周期を u として、u を偶数すなわち $u = 2m$ と仮定する.

$g^m \equiv 1 \bmod b$ と仮定する.
$g = 5$ より、$g \equiv 1 \bmod 2$ になので、$g^m \equiv 1 \bmod 2$ となり、

$$g^m \equiv 1 \bmod 2p.$$

$m < u$ なので、u の最小性に矛盾する.

ここで g^m について $g^m = x$ とおく.

$$g^u = g^{2m} = x^2 \equiv 1 \bmod p$$

$$x^2 - 1 \equiv (x-1)(x+1) \equiv 0 \tag{3}$$

$x - 1 \equiv 0 \bmod p$ と仮定すると、
$x \equiv 1$ となるが、
$g^m \not\equiv 1$ なので成り立たない.

よって、$x - 1 \not\equiv 0 \bmod p$
$x - 1$ は p でわれないので、$\gcd(x-1, p)$=1 を満たす.
ユークリッドの互除法により、$k, l \in \mathbf{Z}$ があって、

$$1 = (x-1)k + pl \tag{4}$$

となる.
式 (4) を p を法としてみると、

$$1 \equiv (x-1)k \bmod p. \tag{5}$$

式 (3) の両辺に k をかけて、式 (5) を代入すると、

$$x + 1 \equiv 0$$

よって、

$$x \equiv -1$$

となるので、

$$g^m \equiv -1 \bmod p$$

である.

$$
\begin{aligned}
r_j &\equiv g^j a \bmod b \\
r_j + r_{j+m} &\equiv g^j a + g^{j+m} a \bmod p \\
&\equiv g^j a - g^j a \\
&\equiv 0
\end{aligned}
$$

よって、$r_j + r_{j+m}$ は、p で割り切れるので、ある $k_j \in \mathbf{Z}$ があり

$$
r_j + r_{j+m} = k_j p \tag{6}
$$

となる.

$r_j < b = 2p,\ r_{j+m} < b = 2p$ より

$$
\begin{aligned}
r_j + r_{j+m} &< 4p, \\
k_j p &< 4p, \\
k_j &< 4.
\end{aligned}
$$

ところで、r_j は奇数である.

$gr_j = bq_{j+1} + r_{j+1}$ に注意する.
$r_0 = a$ なので奇数、$g = 5$ より奇数、$b = 2p$ より偶数なので、r_1 は奇数になる.
これを繰り返すと、r_j はすべて奇数になる.

r_{j+m} も奇数であるため、$r_j + r_{j+m}$ は偶数.
p は奇数なので、(6) より k_j は偶数となる.
一方 $1 \leq k_j < 4$ なので、$k_j = 2$ になる.
よって、$r_j + r_{j+m} = 2p$.

$$
\begin{array}{crcl}
 & gr_j & = & q_{j+1}b + r_{j+1} \\
+) & gr_{j+m} & = & q_{j+m+1}b + r_{j+m+1} \\
\hline
 & g(r_j + r_{j+m}) & = & (q_{j+1} + q_{j+m+1})2p + (r_{j+1} + r_{j+m+1})
\end{array}
$$

これより、

$$
\begin{aligned}
g \cdot 2p &= (q_{j+1} + q_{j+m+1})2p + 2p, \\
g &= q_{j+1} + q_{j+m+1} + 1.
\end{aligned}
$$

$g = 5$ を代入すると、

$$4 = q_{j+1} + q_{j+m+1}.$$

$j = 0, 1, 2, \cdots, m-1$ まで、

$$\begin{aligned} q_1 + q_{m+1} &= 4 \\ q_2 + q_{m+2} &= 4 \\ &\vdots \\ q_m + q_{2m} &= 4 \end{aligned}$$

周期 $u = 2m$ より

$$q_{2m} = q_0.$$

よって、$b = 2p$ のときに 2 分割和を 5 進数でみると、4 が並ぶ形となる.

$4p$ について

【$b=4p$ のとき、2 分割和を 5 進数で表記する】
既約分数 $\frac{a}{b}$ を $g=5$ 進展開する. (p は素数で、$1 \leq a < b$ である.)

循環節の長さ、つまり周期を u とすると、$u=2m$ と仮定でき
$b=2p$ のときと同様にして、

$$g^u \equiv 1 \bmod b$$

$b=4p$ より、4 と p は互いに素なので

$$\begin{cases} g^u \equiv 1 \bmod 4 \\ g^u \equiv 1 \bmod p \end{cases}$$

g^m についても、$2p$ の場合と同様で、

$$g^m \equiv -1 \bmod p$$

がわかる.

$$\begin{aligned} r_j &\equiv g^j a \bmod b \\ r_j + r_{j+m} &\equiv g^j a + g^{j+m} a \bmod p \\ &\equiv g^j a - g^j a \\ &\equiv 0 \end{aligned}$$

よって、$r_j + r_{j+m}$ は p で割り切れるので、乗数 k_j を用いて

$$r_j + r_{j+m} = k_j p \tag{7}$$

と表記することができる.
$r_j < b = 4p, r_{j+m} < b = 4p$ より

$$\begin{aligned} r_j + r_{j+m} &< 8p, \\ k_j p &< 8p, \\ k_j &< 8. \end{aligned}$$

r_j は奇数であり、r_{j+m} も奇数である. p は奇数なので、(7) より k_j は偶数となる.

よって、k_j は 2,4,6 のいずれかになる.

$k_j = 4$ と仮定する.
式 (7) について k_j に 4 を代入して、

$$r_j + r_{j+m} = 4p$$

4 を法としてみると

$$r_j + r_{j+m} \equiv 0 \bmod 4$$

$$r_{j+m} \equiv ag^{j+m} = ag^j g^m = r_j g^m$$

$g = 5$ で、$g \equiv 1 \bmod 4$ なので

$$\begin{aligned} r_{j+m} &\equiv r_j \\ 2r_j &\equiv 0 \bmod 4 \\ r_j &\equiv 0 \bmod 2 \end{aligned}$$

つまり、r_j は偶数となり、 これは、r_j が奇数であることに反する.

よって、$k_j = 2, 6$ となる.
ここで、分子 a が $1 \leq a < 2p$ を満たすとき、$a = r_j$ として考える.
$r_j < 2p, r_{j+m} < 4p$ なので、

$$r_j + r_{j+m} < 6p \tag{8}$$

である.
$k_j = 2, 6,$ 式 (7), 式 (8) より、$k_j = 6$ を満たすことはないので、

$$k_j = 2$$

だけが求められる.
次に、分子 a が $2p < a < 4p$ のとき、$a = r_j$ として考える.
$r_l = b - r_j$ とおくと、

$$r_l + r_{l+m} = k_l p$$

$r_l < 2p$ なので、

$$k_l = 2$$

≪相補性≫ $b = r_l + r_j$ において、
$k_l + k_j = 8$ を満たすことを用いると、

$$\begin{aligned} 2 + k_j &= 8 \\ k_j &= 6 \end{aligned}$$

すなわち、$\dfrac{a}{4p}$ のとき、前半の乗数は全て 2 で、後半の乗数は全て 6 となる.

$$\begin{array}{rrcl} & gr_j & = & q_{j+1}b + r_{j+1} \\ +) & gr_{j+m} & = & q_{j+m+1}b + r_{j+m+1} \\ \hline & g(r_j + r_{j+m}) & = & (q_{j+1} + q_{j+m+1})4p + (r_{j+1} + r_{j+m+1}) \end{array}$$

まず前半の $k_j = 2$ について、$r_j + r_{j+m} = 2p$ を代入して、

$$\begin{aligned} g \cdot 2p &= (q_{j+1} + q_{j+m+1})4p + 2p, \\ g &= 2(q_{j+1} + q_{j+m+1}) + 1. \end{aligned}$$

$g = 5$ を代入すると、

$$\begin{aligned} 4 &= 2(q_{j+1} + q_{j+m+1}), \\ 2 &= (q_{j+1} + q_{j+m+1}). \end{aligned}$$

$j = 0, 1, 2, \cdots, m-1$ まで、

$$\begin{aligned} q_1 + q_{m+1} &= 2 \\ q_2 + q_{m+2} &= 2 \\ &\vdots \\ q_m + q_{2m} &= 2 \end{aligned}$$

周期 $u = 2m$ より

$$q_{2m} = q_0$$

よって、分子 a が $1 \leq a < 2p$ のとき、２分割和を５進数でみると、２が並ぶ形となる.

つぎに $k_j = 6$ について、$r_j + r_{j+m} = 6p$ を代入すると、

$$\begin{aligned} g \cdot 6p &= (q_{j+1} + q_{j+m+1})4p + 6p, \\ 3g &= 2(q_{j+1} + q_{j+m+1}) + 3. \end{aligned}$$

$g = 5$ を代入すると、

$$\begin{aligned} 12 &= 2(q_{j+1} + q_{j+m+1}), \\ 6 &= (q_{j+1} + q_{j+m+1}). \end{aligned}$$

[6] は 4 進数において、[1 1] となる.

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
 & & & & & & & & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & 1 & 1 & \\
 & & & & & & & & & & 1 & 1 & & \\
 & & & & & & & & & 1 & 1 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & 1 & & & & \\
 & & & & & & & \vdots & & & & & & \\
 & & & & & 1 & 1 & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 1 & 1 & & & & & & & & & \\
 & & 1 & 1 & & & & & & & & & & \\
+) & 1 & 1 & & & & & & & & & & & \\
\hline
 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1
\end{array}
$$

よって、分子 a が $2p < a < 4p$ のとき、2 分割和を 5 進数でみると、
$m-2$ 個の 2 を用いて、[1 2 2 $\cdots$ 2 2 1] という形で表せる.

5 今後の課題

6 感想