分数$\dfrac{a}{b}(b=2p,4p)$の５進小数展開の循環節の分割和について

08043022 小山　友果理

例:$\dfrac{1}{7}$の10進数での小数展開.

$$\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$$

[142857]が循環節.

二分割して足すと、$[142] + [857] = [999]$.

一般に素数pについて、分数$\dfrac{1}{p}$を小数展開し、循環節の長さが偶数のとき、二分割して和を求めると9が並ぶ形.(Goodwyn 1802)

既約分数$\dfrac{a}{2p}$,$(1 \leq a < 2p)$と、既約分数$\dfrac{a}{4p}$,$(1 \leq a < 4p)$を、5進数での小数展開の二分割和を考える.

例：$p=7$のとき、$\frac{1}{p}, \frac{1}{2p}, \frac{1}{4p}$を５進数で小数展開.

$\frac{1}{p}$

$$\frac{1}{7} = 0.\dot{0}3241\dot{2}$$

$\frac{1}{2p}$

$$\frac{1}{14} = 0.\dot{0}1343\dot{1}$$

[0 3 2 4 1 2]を二分割→[0 3 2]と[4 1 2].　[0 1 3 4 3 1]を二分割→[0 1 3]と[4 3 1].

それぞれ足すと、

$$\begin{array}{rccc} & 0 & 3 & 2 \\ +) & 4 & 1 & 2 \\ \hline & \color{red}{4} & \color{red}{4} & \color{red}{4} \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} & 0 & 1 & 3 \\ +) & 4 & 3 & 1 \\ \hline & \color{red}{4} & \color{red}{4} & \color{red}{4} \end{array}$$

つまり、$\frac{1}{7}$の５進数での二分割和は[4 4 4].

$\frac{1}{14}$の二分割和も[4 4 4].

$\frac{1}{4p}$

ここで、$\frac{15}{28}$に注目.

$$\frac{1}{28} = 0.\dot{0}0421\dot{3} \qquad \frac{15}{28} = 0.\dot{2}3144\dot{0}$$

[0 0 4 2 1 3] を二分割→[0 0 4] と [2 1 3].　[0 2 3 1 4 4] を二分割→[0 2 3] と [1 4 4].

それぞれ足すと、

$$\begin{array}{rr} & 0\ 0\ 4 \\ +) & 2\ 1\ 3 \\ \hline & 2\ 2\ 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 2\ 3\ 1 \\ +) & 4\ 4\ 0 \\ \hline & 1\ 2\ 2\ 1 \end{array}$$

つまり、$\frac{1}{28}$の５進数での二分割和は[2 2 2].

$\frac{5}{28}$の二分割和は[1 2 2 1].

この[1 2 2 1]という数は、先に出た[2 2 2]を３倍した数である.

結果１：既約分数$\dfrac{a}{2p}, 1 \leq a < 2p$を小数展開し
循環節の長さが2の倍数とき５進展開での二分割和の結果.

任意のaにおいて同じ結果なので、bについてのまとめた.($p < 50$まで)

pの値	分母b	５進数での二分割和	４の個数
3	6	[4]	1
7	14	[4,4,4]	3
13	26	[4,4]	2
17	34	[4,4,4,4,4,4,4,4]	8
23	46	[4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4]	11
29	58	[4,4,4,4,4,4,4]	7
37	74	[4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4]	18
41	82	[4,4,4,4,4,4,4,4,4,4]	10
43	86	[4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4]	21
47	94	[4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4,4]	23

証明：【$b=2p$のとき】既約分数$\dfrac{a}{b}(1 \le a < b)$を$g=5$進数展開.

商をq,余りをr.

$$\begin{aligned}
ga &= q_1 b + r_1 \Longleftrightarrow ga \equiv r_1 \bmod b,\\
gr_1 &= q_2 b + r_2 \Longleftrightarrow gr_1 \equiv r_2,\\
&\vdots\\
gr_j &= q_{j+1} b + r_{j+1}\\
&\vdots\\
gr_u &= q_{u+1} b + r_{u+1}
\end{aligned}$$

よって、

$$g^2 a \equiv r_2.$$

一般に、

$$g^j a \equiv r_j \pmod{b}$$

鳩の巣原理より、$j > i$ で $r_j = r_i$ となる j, i が存在.

$$g^j a \equiv g^i a. (\because r_j \equiv g^j a, r_i \equiv g^i a, r_j = r_i)$$

a と b は互いに素なので、

$$1 = ax + by \iff 1 \equiv ax \bmod b$$

$$g^j ax \equiv g^i ax,$$
$$g^j \equiv g^i.$$

g と b は互いに素なので、

$$1 = gs + bt \iff 1 \equiv gs \bmod b.$$

$$\begin{aligned} s &\equiv g^{-1} \\ g^j s^i &\equiv g^i s^i \\ g^j g^{-i} &\equiv (gs)^i \\ g^{j-i} &\equiv 1 \end{aligned}$$

$u = j - i$ とおくと　　$g^u \equiv 1$ (uが最小とき、uは周期)

$$r_u \equiv g^u a \equiv a \pmod{b}$$

$$r_u = a (\because a < b \wedge r_u < b)$$

$g^u \equiv 1 \pmod{b}, b = 2p$ より、2 と pは互いに素なので

$$\begin{cases} g^u \equiv 1 \bmod 2 \\ g^u \equiv 1 \bmod p \end{cases}$$

２分割できるとき、$u = 2m$ と仮定.

$g^m \equiv 1 (\mathrm{mod} b)$ と仮定.

$g = 5$ より、$g \equiv 1 \bmod 2$ になので、$g^m \equiv 1 \bmod 2$ となり、

$$g^m \equiv 1 \bmod 2p.$$

これは、uの最小性に矛盾.

$g^m = x$とおく.

$$g^u = g^{2m} = x^2 \equiv 1 \bmod p$$

$$x^2 - 1 \equiv (x-1)(x+1) \equiv 0$$

$x - 1 \equiv 0 \bmod p$と仮定すると、$x = g^m \not\equiv 1$なので不成立.

$$x - 1 \not\equiv 0 \bmod p$$

$x-1$はpでわれないので、

$$1 = (x-1)k + pl \Longleftrightarrow 1 \equiv (x-1)k \bmod p.$$

両辺にkをかけて代入、

$$x + 1 \equiv 0$$

よって、

$$x \equiv -1$$

となるので、

$$g^m \equiv -1 \bmod p.$$

$$
\begin{aligned}
r_j &\equiv g^j a \bmod b \\
r_j + r_{j+m} &\equiv g^j a + g^{j+m} a \bmod p \\
&\equiv g^j a - g^j a \\
&\equiv 0
\end{aligned}
$$

$r_j + r_{j+m}$は、ある整数k_jを用いて

$$\boxed{r_j + r_{j+m} = k_j p}$$

$r_j < b = 2p, r_{j+m} < b = 2p$より

$$
\begin{aligned}
r_j + r_{j+m} &< 4p, \\
k_j p &< 4p, \\
k_j &< 4.
\end{aligned}
$$

$gr_j = bq_{j+1} + r_{j+1}$,$r_j$ について、$g = 5$,$b = 2p$,$r_0 = a$ より ,r_1 は奇数.

繰り返すと、r_j はすべて奇数.

$r_j + r_{j+m}$ は偶数.
$r_j + r_{j+m} = k_j p$ より k_j は偶数.

一方 $1 \leq k_j < 4$ より、$k_j = 2.$

よって、

$$r_j + r_{j+m} = 2p.$$

$$\begin{array}{rcl} & gr_j & = & q_{j+1}b + r_{j+1} \\ +) & gr_{j+m} & = & q_{j+m+1}b + r_{j+m+1} \\ \hline & g(r_j + r_{j+m}) & = & (q_{j+1} + q_{j+m+1})2p + (r_{j+1} + r_{j+m+1}) \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
g \cdot 2p &= (q_{j+1} + q_{j+m+1})2p + 2p, \\
g &= q_{j+1} + q_{j+m+1} + 1.
\end{aligned}
$$

$$4 = q_{j+1} + q_{j+m+1} (\because g = 5)$$

$j = 0, 1, 2, \cdots, m-1$まで、

$$
\begin{aligned}
q_1 + q_{m+1} &= 4 \\
q_2 + q_{m+2} &= 4 \\
&\vdots \\
q_m + q_{2m} &= 4
\end{aligned}
$$

周期$u = 2m$より

$$q_{2m} = q_0.$$

$g = 5, b = 2p$のときの２分割和は、４が並ぶ形となる.

結果２：$\dfrac{a}{4p}, 1 \leq a < 4p$を小数展開し

循環節の長さが2の倍数とき５進展開での二分割和の結果.

$p = 3,$分母$b = 12$

分子a	５進数での循環節	５進数での二分割和	乗数
1	[0 2]	[2]	2
5	[2 0]	[2]	2
7	[2 4]	[1,1]	6
11	[4 2]	[1,1]	6

$p = 7$のとき、分母$b = 28$

分子a	５進数での循環節	５進数での二分割和	乗数
1	[0 0 4 2 1 3]	[2,2,2]	2
3	[0 2 3 1 4 4]	[2,2,2]	2
5	[0 4 2 1 3 0]	[2,2,2]	2
9	[1 3 0 0 4 2]	[2,2,2]	2
11	[1 4 4 0 2 3]	[2,2,2]	2
13	[2 1 3 0 0 4]	[2,2,2]	2
15	[2 3 1 4 4 0]	[1,2,2,1]	6
17	[3 0 0 4 2 1]	[1,2,2,1]	6
19	[3 1 4 4 0 2]	[1,2,2,1]	6
23	[4 0 2 3 1 4]	[1,2,2,1]	6
25	[4 2 1 3 0 0]	[1,2,2,1]	6
27	[4 4 0 2 3 1]	[1,2,2,1]	6

証明：【$b=4p$のとき】既約分数$\dfrac{a}{b}(1 \leq a < b)$を$g=5$進数展開.

$r_j + r_{j+m} = k_j p$

k_jは2,4,6のいずれか.

$k_j = 4$と仮定.

$$r_j + r_{j+m} = 4p \Longleftrightarrow r_j + r_{j+m} \equiv 0 \bmod 4$$

$r_{j+m} \equiv r_j (\because g=5)$

$$\begin{aligned} 2r_j &\equiv 0 \bmod 4 \\ r_j &\equiv 0 \bmod 2 \end{aligned}$$

r_jが奇数に反し、$k_j = 2, 6.$

$1 \leq a < 2p$のとき、$a = r_j$として考える.

$r_j < 2p, r_{j+m} < 4p$なので、$r_j + r_{j+m} < 6p$

$k_j = 2, 6$より

$$k_j = 2$$

$2p < a < 4p$のとき、$a = r_j$として考える.

≪相補性≫ $\cdots$ $r_l + r_j = b$において、
$k_l + k_j = 2b$を満たす.

$p = 3,$つまり分母$b = 12$、

分子a	5進数での循環節	5進数での二分割和	乗数
1	[0 2]	[2]	2
5	[2 0]	[2]	2
7	[2 4]	[1,1]	6
11	[4 2]	[1,1]	6

$r_l = b - r_j$ とおくと、

$$r_l + r_{l+m} = k_l p$$

$r_l < 2p$ なので、

$$k_l = 2$$

$$2 + k_j \;=\; 8$$

$$k_j = 6$$

$\dfrac{a}{4p}$ のとき、前半の乗数は 2 、後半の乗数は 6 となる.

$$\begin{array}{rccc} & gr_j & = & q_{j+1}b + r_{j+1} \\ +) & gr_{j+m} & = & q_{j+m+1}b + r_{j+m+1} \\ \hline & g(r_j + r_{j+m}) & = & (q_{j+1} + q_{j+m+1})4p + (r_{j+1} + r_{j+m+1}) \end{array}$$

前半$k_j = 2$について、

$$\begin{aligned} g \cdot 2p &= (q_{j+1} + q_{j+m+1})4p + 2p, \\ g &= 2(q_{j+1} + q_{j+m+1}) + 1. \end{aligned}$$

$g = 5$を代入、

$$\begin{aligned} 4 &= 2(q_{j+1} + q_{j+m+1}), \\ 2 &= (q_{j+1} + q_{j+m+1}). \end{aligned}$$

$j = 0, 1, 2, \cdots, m-1$まで、

$$\begin{aligned} q_1 + q_{m+1} &= 2 \\ q_2 + q_{m+2} &= 2 \\ &\vdots \\ q_m + q_{2m} &= 2 \end{aligned}$$

周期$u = 2m$より

$$q_{2m} = q_0$$

$1 \leq a < 2p$のとき、2が並ぶ形となる.

$k_j = 6$ のとき

$$\begin{aligned} g \cdot 6p &= (q_{j+1} + q_{j+m+1})4p + 6p, \\ 3g &= 2(q_{j+1} + q_{j+m+1}) + 3. \end{aligned}$$

$g = 5$ を代入すると、

$$\begin{aligned} 12 &= 2(q_{j+1} + q_{j+m+1}), \\ 6 &= (q_{j+1} + q_{j+m+1}). \end{aligned}$$

$j = 0, 1, 2, \cdots, m-1$ まで、

$$\begin{aligned} q_1 + q_{m+1} &= 6 \\ q_2 + q_{m+2} &= 6 \\ &\vdots \\ q_m + q_{2m} &= 6 \end{aligned}$$

周期 $u = 2m$ より

$$q_{2m} = q_0$$

$[6]$ は5進数において、$[1\ 1]$ となる.

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
 & & & & & & & & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & & & & & & & 1 & 1 & \\
 & & & & & & & & & & 1 & 1 & & \\
 & & & & & & & & & 1 & 1 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & 1 & & & & \\
 & & & & & & & \vdots & & & & & & \\
 & & & & & 1 & 1 & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 1 & 1 & & & & & & & & & \\
 & & 1 & 1 & & & & & & & & & & \\
+) & 1 & 1 & & & & & & & & & & & \\
\hline
 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1
\end{array}
$$

分子aが $2p < a < 4p$ のとき、

$m-2$個の2を用いて、$[1\ 2\ 2 \cdots\ 2\ 2\ 1]$という形で表せる.

$p = 7$のとき、分母$b = 28$

分子a	５進数での循環節	５進数での二分割和	乗数
1	[0 0 4 2 1 3]	[2,2,2]	2
3	[0 2 3 1 4 4]	[2,2,2]	2
5	[0 4 2 1 3 0]	[2,2,2]	2
9	[1 3 0 0 4 2]	[2,2,2]	2
11	[1 4 4 0 2 3]	[2,2,2]	2
13	[2 1 3 0 0 4]	[2,2,2]	2
15	[2 3 1 4 4 0]	[1,2,2,1]	6
17	[3 0 0 4 2 1]	[1,2,2,1]	6
19	[3 1 4 4 0 2]	[1,2,2,1]	6
23	[4 0 2 3 1 4]	[1,2,2,1]	6
25	[4 2 1 3 0 0]	[1,2,2,1]	6
27	[4 4 0 2 3 1]	[1,2,2,1]	6