回文数の研究
4進数の場合

三上将平

1. 回文化操作とは

　ある自然数 A に対し、1 の位から逆に並べ替えた数を B とおく.
$A+B$ を改めて A として繰り返す. 回文になると終了する.
これを回文化操作という.
しかし必ず回文になるとは限らない.

2. 目的

4進数の中で回文化操作によって発散する例を構成し実際に発散することを証明する.

また、発散する数の相互関係を研究する.

例を２つ挙げる．(ここでは4進数で考える．)

Ex 1)回文になる例

●$A = 10230$(10進数で300)の場合
このとき、$B = 03201$となり、
$D_1 = 10230 + 3201 = 20031.$
さらに、$D_2 = 20031 + 13002 = 33033.$
となり、回文となった.

Ex 2) 回文にならず発散する例

• $A=10332$(10進数で318)の場合
以下は回文の操作を100回行った時の結果である.
A=[1, 0, 3, 3, 2]
A= [1, 0, 0, 2, 3, 3]
A=[1, 0, 3, 2, 3, 0, 0]
A=[1, 1, 3, 1, 2, 0, 1]
⋮
A=[1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 0, 1]
A=[2, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 1, 2]
A=[1, 0, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
A=[1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 3, 1, 2, 3, 3, 3,

3. 方法

3.1. 4進数の数の中から、回分の操作を100回行っても回文にならない数を見つける．(98個)

290 a=[1, 0, 2, 0, 2]
318 a=[1, 0, 3, 3, 2]
378 a=[1, 1, 3, 2, 2]
381 a=[1, 1, 3, 3, 1]
438 a=[1, 2, 3, 1, 2]
⋮
1460 a=[1, 1, 2, 3, 1, 0]
1462 a=[1, 1, 2, 3, 1, 2]
1479 a=[1, 1, 3, 0, 1, 3]
1497 a=[1, 1, 3, 1, 2, 1]
1498 a=[1, 1, 3, 1, 2, 2]

3.2. 見つけた数のうち1つについて1〜100回のそれぞれでどのような数になっているか調べる.

今回は、発散する可能性のある数の中で10332(10進数の318)について注目した.
下表は3回目からのデータをグループ分けしたものの一部である.

$[1, 0, 3, 3, 2, 3, 0, 0]$
$[1, 0, 3, 3, 3, 2, 3, 0, 0, 0]$
$[1, 0, 3, 3, 3, 3, 2, 3, 0, 0, 0, 0]$
$[1, 0, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 3, 0, 0, 0, 0, 0]$
$[1, 0, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$
$[1, 0, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]$

3.3. グルーピングの方法.

A＝先頭10で始まり0で終わるグループ
B＝先頭11で始まり01で終わるグループ
C＝先頭22で始まり12で終わるグループ

更に各グループの偶数番目と奇数番目の場合で分類する.

Aの場合、連続する数3を挟む数が10と3323$\cdots$の場合と、10と323$\cdots$の場合で分類する.
Bの場合、連続する数0を挟む数が11と3222$\cdots$の場合と、11と312$\cdots$の場合で分類する.
Cの場合、連続する数0を挟む数が22と2111$\cdots$の場合と、22と131$\cdots$の場合で分類する.

$$A(odd)(k) = 10\ 3^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}\ 3323\ 0^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}\ 00$$
$$A(even)(g) = 10\ 3^{\left(\frac{g-2}{2}\right)}\ 323\ 0^{\left(\frac{g-2}{2}\right)}\ 00$$

$$B(odd)(k) = 11\ 0^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}\ 3222\ 3^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}\ 01$$
$$B(even)(g) = 11\ 0^{\left(\frac{g-2}{2}\right)}\ 312\ 3^{\left(\frac{g-2}{2}\right)}\ 01$$

$$C(odd)(k) = 22\ 0^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}\ 2111\ 3^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}\ 12$$
$$C(even)(g) = 22\ 0^{\left(\frac{g-2}{2}\right)}\ 131\ 3^{\left(\frac{g-2}{2}\right)}\ 12$$

上記のように定式化した.

3.4. 定式化した数列に回文化操作を行う.

$$
\begin{array}{rl}
 & 10\ 3^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}\ 3323\ 0^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}\ 00 \\
+) & 00\ 0^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}\ 3233\ 3^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}\ 01 \\
\hline
 & 11\ 0^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}\ 3222\ 3^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}\ 01 \\
= & B(odd)(k)
\end{array}
$$

回文化操作を行って得た $(B(odd)(k))$ にさらに回文化操作を行う.

4. 結果

$$
\begin{array}{cccccc}
 & A(odd)(k) & \Rightarrow & B(odd)(k) & \Rightarrow & C(odd)(k) \\
\Rightarrow & A(even)(k+2) & \Rightarrow & B(even)(k+2) & \Rightarrow & C(even)(k+2) \\
\Rightarrow & A(odd)(k+2) & \Rightarrow & \cdots & &
\end{array}
$$

となり、数列が発散されることが証明された.
また、8進数10652(10進数で4522)の場合も同様にできる.

4.1. 10進数表示1 ∼1500の範囲の発散する4進数について以下が確認されました.