回文数の研究
２進数の場合

森拓磨
学習院大学理学部数学科

平成 24 年 1 月 13 日

目次

1 目的

13531 のように逆順に並び替えても不変な数を回文数という．
一般には $G > 1$ を決めて G 進数で表記される場合も同様に回文数が定義できる．与えられた G 進数 A に対しそれを逆順に並べた数を B とし，$A + B$ を求める．これが回文数にならないときは $A + B$ を改めて A としてこの操作を繰り返す．これを回文化操作という．
回文化操作を続けると、いつかは回文数になるのかという問題がある．

例 (10 進数の場合)

・$A = 472$ の場合を考える
このとき $B = 274$ となり、
$D_1 = 472 + 274 = 647$
さらに、$D_2 = 647 + 746 = 1433,$
$D_3 = 1433 + 3931 = 5324,$
$D_4 = 5324 + 4235 = 9559,$
となり、回文となった．
発散しそうな例としては、196,285 などが挙げられる．だが、これらの 10 進数が実際に発散するか否かは未だに証明されていない．

(2 進数の場合)
・$A = 1101$ のとき (10 進表記では 13)
このとき $B = 1011$ となり、
$D_1 = 1101 + 1011 = 10000,$
さらに、$D_2 = 10000 + 00001 = 10001$
となり、回文になった．
発散しそうな例として，$22, 26, 28$ などが挙げられる．
そして，2 進数ならば、場合によっては発散を証明することができる．
これ以降は 2 進数の場合について考える．

2　方法

リストの結合

```
append0(Z=[]+Z).
append0([A|Z]=[A|X]+Y):-append0(Z=X+Y).
```

10 進数を G 進数に変換

```
dec10(N,[N],G):-N<G,!.
dec10(N,L,G):-
    N1 is N//G,
    R is N mod G,
    dec10(N1,L1,G),
    append0(L=L1+[R]).
```

G 進数を 10 進数に変換

```
bec10(N,[N],_):-!.
bec10(N,L,G):-
    append0(L=L1+[A]),
    bec10(N1,L1,G),
    N is N1*G+A.
```

リストの和・差

```
listsum(C=A+B,G):-
    bec10(Na,A,G),
    bec10(Nb,B,G),
    Nc is Na+Nb,
    dec10(Nc,C,G).

listdif(C=A-B,G):-
    bec10(Na,A,G),
    bec10(Nb,B,G),
    Nc is Na-Nb,
    dec10(Nc,C,G).
```

ダイナミック宣言

```
:-dynamic sk/1.

go:-abolish(sk/1),asserta(sk([])).
```

A+B を実行するプログラム

```
tasu(C=A+B,G):-
%    write(a=A),nl,
 bec10(Na,A,G),bec10(Nb,B,G),
     (
     (Na>=Nb)->(listsum(C=A+B,G));
    (listsum(C=B+A,G))
     ).
```

計算工程が 100 を超えたら、stop となり計算を終了する

```
kaibun(N,A,G):-
        write(N),put(9),bec10(Na,A,G),write(Na),put(9),write(A),nl,
        reverse(A,B),N1 is N+1,
    (N>=100 ->(write(stop),nl);(
    (
    (B==A) -> put(9), write(A),put(9),
     write(n=N1),put(9);
     (
        tasu(C=A+B,G), kaibun(N1,C,G)
    )))).
```

Ａの部分をリストでなく、生の数字で出力できるようにする

```
kaibun0(N,AA,G):-
    dec10(AA,A,G),kaibun(N,A,G).
```

回文化操作を for 文を用いて a〜b まで実行する．なお，100 回繰り返しても回文にならない数は stop となり操作を終了する．
(※２進数の場合)

```
for(I=<J,I):- I =< J.
for(I=<J,K):-I=<J,I1 is I +1, for(I1=<J,K).

kaibuna(A=<B):-for(A=<B,C),write(C),put(9),kaibun0(1,C,2),nl,fail.
kaibuna(_=<_):-!.
```

3　結果

以下は 1 ∼ 500 で回文化操作を 100 回繰り返しても回文にならない 2 進数を 10 進数で表記した.

表 1: 回文にならない数

22	95	158	211	291	360	426	496
26	97	163	217	293	362	428	498
28	105	164	220	299	367	430	500
35	106	166	223	300	370	434	
37	108	169	225	302	372	436	
41	110	172	227	304	374	438	
46	116	174	228	305	378	441	
47	120	177	236	310	382	442	
49	122	180	244	315	383	444	
60	124	182	248	318	389	446	
61	125	185	251	323	393	447	
67	131	186	252	324	394	449	
75	135	190	253	329	402	465	
77	139	191	263	329	402	468	
78	141	193	267	340	405	472	
84	147	197	269	342	410	474	
86	149	199	279	346	412	476	
89	152	201	280	348	414	488	
90	155	203	281	350	417	490	
94	157	209	286	353	418	493	

ここで，ある数について回文化操作をしたときにその計算過程について考えてみる

・22 の場合（回文化操作 計算過程）

回数　数値　(10 進数→2 進数)
1 回目 22 [1, 0, 1, 1, 0]
2 回目 35 [1, 0, 0, 0, 1, 1]
3 回目 84 [1, 0, 1, 0, 1, 0, 0]
4 回目 105 [1, 1, 0, 1, 0, 0, 1]
5 回目 180 [1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0]
6 回目 225 [1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1]
7 回目 360 [1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]
8 回目 405 [1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1]
9 回目 744 [1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]
10 回目 837 [1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1]
11 回目 1488 [1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0]
12 回目 1581 [1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1]
13 回目 3024 [1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0]
14 回目 3213 [1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1]
15 回目 6048 [1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]
16 回目 6237 [1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1]
17 回目 12192 [1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]
18 回目 12573 [1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1]
19 回目 24384 [1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
20 回目 24765 [1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1]
21 回目 48960 [1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
22 回目 49725 [1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1]
23 回目 97920 [1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
24 回目 98685 [1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1]
25 回目 196224 [1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
26 回目 197757 [1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1]
27 回目 392448 [1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
28 回目 393981 [1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1]
29 回目 785664 [1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
30 回目 788733 [1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1]
となる.

次に，計算過程 3 回目から注目してみる．3 回目を A_1、4 回目を B_1、5 回目を C_1、6 回目を D_1、7 回目を A_2 ...... とし、4 つの周期で着目すると次の規則性を発見した.
ここで，たとえば 2 進表記 [1,1,1,1,0,0,1,0] ならば,$1^4 0^2 10$ という風に指数の分だけその数が連続するという意味で定義する.

一般項

$A_n = 101^n0100^n$
$B_n = 110^n101^{n-1}01$
$C_n = 101^n0100^n$
$D_n = 110^{n-1}10001^{n-1}1$

回文化操作を $\rightarrow$ で示すと、$A_n \rightarrow B_n \rightarrow C_n \rightarrow D_n \rightarrow A_{n+1}$ となることを帰納法を用いて証明する.

(i)$n=5$ のとき
$A_5 = 101^5 0100^5 = 101111101000000$
となり、A_5 を逆順に並び替えたものを
$\overline{A_5} = 000000101111101$
とする.
A_5 を例として回文化操作をすると,

$$
\begin{array}{llrl}
 & A_5 = & 101111101000000 & \\
+) & \overline{A_5} = & 000000101111101 & \\
\hline
 & & 110000010111101 & =B_5 \\
+) & \overline{B_5} = & 101111010000011 & \\
\hline
 & & 1011111101000000 & =C_5 \\
+) & \overline{C_5} = & 0000001011111101 & \\
\hline
 & & 1100001000111101 & =D_5 \\
+) & \overline{D_5} = & 1011110001000011 & \\
\hline
 & & 10111111011111111 & =A_6
\end{array}
$$

よって成り立つ.

(ii) $n=k$ のときを仮定して, $n=k+1$ の場合を示す.
(i) と同様にして,

$$
\begin{array}{llcl}
 & A_k = & 101^k0100^k & \\
+) & \overline{A_k} = & 0^k0101^k01 & \\
\hline
 & & 110^k101^{k-1}01 & =B_k \\
+) & \overline{B_k} = & 101^{k-1}010^k11 & \\
\hline
 & & 1011^k0100^k & =C_k \\
+) & \overline{C_k} = & 0^k0101^k101 & \\
\hline
 & & 110^{k-1}10001^{k-1}01 & =D_k \\
+) & \overline{D_K} = & 101^{k-1}10001^{k-1}11 & \\
\hline
 & & 101^{k+1}0100^{k+1} & =A_{k+1}
\end{array}
$$

となる. 仮に $n=3$ を入れても成り立つため, n のときも成り立ち, この数列は $A_n \to B_n \to C_n \to D_n \to A_{n+1}$ という風に循環することがわかった.

また, これらの一般項は 4 つのどれをとっても左右非対称の形をしているので, 延々と回文化操作をしても回文数にはならない.
よって, 22 で回文化操作をすると無限大へと発散する.

4 考察

22 のように，計算過程がある周期を描いて循環し，無限大へと発散する例は他にもたくさんある．

1 22 [1, 0, 1, 1, 0]
2 35 [1, 0, 0, 0, 1, 1]
3 84 [1, 0, 1, 0, 1, 0, 0]
4 105 [1, 1, 0, 1, 0, 0, 1]
5 180 [1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0]
6 225 [1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1]
7 360 [1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]

1 26 [1, 1, 0, 1, 0]
2 37 [1, 0, 0, 1, 0, 1]
3 78 [1, 0, 0, 1, 1, 1, 0]
4 135 [1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1]
5 360 [1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]

1 28 [1, 1, 1, 0, 0]
2 35 [1, 0, 0, 0, 1, 1]
3 84 [1, 0, 1, 0, 1, 0, 0]
4 105 [1, 1, 0, 1, 0, 0, 1]
5 180 [1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0]
6 225 [1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1]
7 360 [1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]

1 35 [1, 0, 0, 0, 1, 1]
2 84 [1, 0, 1, 0, 1, 0, 0]
3 105 [1, 1, 0, 1, 0, 0, 1]
4 180 [1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0]
5 225 [1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1]
6 360 [1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]

1 37 [1, 0, 0, 1, 0, 1]
2 78 [1, 0, 0, 1, 1, 1, 0]
3 135 [1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1]
4 360 [1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]

1 41 [1, 0, 1, 0, 0, 1]
2 78 [1, 0, 0, 1, 1, 1, 0]
3 135 [1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1]
4 360 [1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]

1 46 [1, 0, 1, 1, 1, 0]
2 75 [1, 0, 0, 1, 0, 1, 1]
3 180 [1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0]
4 225 [1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1]
5 360 [1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]

1 47 [1, 0, 1, 1, 1, 1]
2 108 [1, 1, 0, 1, 1, 0, 0]
3 135 [1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1]
4 360 [1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]

1 49 [1, 1, 0, 0, 0, 1]
2 84 [1, 0, 1, 0, 1, 0, 0]
3 105 [1, 1, 0, 1, 0, 0, 1]
4 180 [1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0]
5 225 [1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1]
6 360 [1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]

1 60 [1, 1, 1, 1, 0, 0]
2 75 [1, 0, 0, 1, 0, 1, 1]
3 180 [1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0]
4 225 [1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1]
5 360 [1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]

1 61 [1, 1, 1, 1, 0, 1]
2 108 [1, 1, 0, 1, 1, 0, 0]
3 135 [1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1]
4 360 [1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]

1 75 [1, 0, 0, 1, 0, 1, 1]
2 180 [1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0]
3 225 [1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1]
4 360 [1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]

1 78 [1, 0, 0, 1, 1, 1, 0]
2 135 [1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1]
3 360 [1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]
4 405 [1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1]

1 84 [1, 0, 1, 0, 1, 0, 0]
2 105 [1, 1, 0, 1, 0, 0, 1]
3 180 [1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0]
4 225 [1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1]
5 360 [1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]

22 を始めとするこれらの数は，全て 360 に帰着することがわかる．
すなわち，これらの数は周期 4 で無限に循環する．

表 2: それぞれ回文化操作をしたときの軌跡　川の流れのように

				46													
					↘												
22						75											
	↘				↗		↘										
		35		60				180	→	225							
	↗		↘				↗				↘						
28				84	→	105						↘					
			↗										↘				
		49												↘			
															360	⟶	⋯
				26	→	37								↗			
							↘						↗				
								78				↗					
							↗		↘		↗						
						41				135							
									↗								
						47	→	108									
							↗										
						61											

それぞれの数から回文化操作をしたとき，225 に集まるグループ {22,28,35,46,49,60,75,84,105,180} と，135 に集まるグループ {26,37,41,47,61,78,108} があり，その後 360 に合流し同じ軌跡を描くということがわかった．

ここで，これらのグループに属さない仲間はずれの数はどうなるのか．
77 を例に挙げて考えてみる．

1 回目 77 [1, 0, 0, 1, 1, 0, 1]
2 回目 166 [1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0]
3 回目 267 [1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1]
4 回目 684 [1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0]
5 回目 897 [1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]
6 回目 1416 [1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]
7 回目 1557 [1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1]

8 回目 2904 [1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0]
9 回目 3333 [1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1]
10 回目 5904 [1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]
11 回目 6189 [1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1]
12 回目 11952 [1, 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0]
13 回目 12813 [1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1]
14 回目 24096 [1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]
15 回目 24669 [1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 1]
16 回目 48480 [1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0]
17 回目 50205 [1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 1]
18 回目 97344 [1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
19 回目 98493 [1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1]
20 回目 195264 [1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
21 回目 198717 [1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1]
22 回目 391296 [1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
23 回目 393597 [1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1]
24 回目 783744 [1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
25 回目 790653 [1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1]
26 回目 1569024 [1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
27 回目 1573629 [1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1]
28 回目 3140352 [1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
29 回目 3154173 [1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1]
30 回目 6283776 [1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
となり，今回は 4 回目から $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2 \ldots\ldots$ とすると，
一般項
$A_n = 101^n010110^{n+1}$
$B_n = 110^{n-1}10^51^{n-1}01$
$C_n = 101^{n+1}0^310^{n+2}$
$D_n = 110^{n+3}101^n01$
という形になる．

この一般項は先ほどの証明と同様に数学的帰納法で証明でき, 周期 4 で循環することがわかる．そして，これらは左右非対称であるため，回文数になることはなく無限大へと発散する．

5　今後の課題

2 進数で回文化操作を 100 回続けても回文にならない数について，それぞれ操作を続けていくといずれ 360 に帰着し，その後循環して無限大へと発散する数のグループが存在することを証明できた．しかし，その他の数について回文化操作を続けていくと，ある規則的な動きをするような数や，複数の数がどこかで合流したり，そのような相互関係のあるグループがまだまだ存在するかもしれない．そのような数を今後後輩に研究してもらい，なにかを発見してもらえたら非常に嬉しいです.

6　感想

1 年間このゼミを続けて，改めて数学の魅力を知りました. 回文の研究をしていく過程で，まずはプログラムを正確に作るのに大変苦労しました. 自分では出来たと思って実行してもなかなか思い通りにはいかず, 嫌になってしまうこともありました. しかし，飯高教授を始め，代々の先輩方や同期の皆の力を借りながらも自力でがんばって成功したときの達成感はなんともいえない素晴らしいものでした. また，本格的な研究をしていき，多くのデータの中から数学の規則を発見したときは非常に感動したのを今でも覚えています. 今回解けなかった証明や手の届かなかった問題など，さらに詳しい研究を今後後輩に進めてもらえたら嬉しく思います.