回文数の研究
～2 進数の場合～

森拓磨
学習院大学理学部数学科

目的

13531のように逆順に並び替えても不変な数を回文数という.
一般には$G > 1$を決めてG進数で表記される場合も同様に回文数が定義できる. 与えられたG進数Aに対しそれを逆順に並べた数をBとし, A+Bを求める. これが回文数にならないときはA+Bを改めてAとしてこの操作を繰り返す. これを回文化操作という.
回文化操作を続けると、いつかは回文数になるのかという問題がある.

研究内容

2進数の中で回文化操作によって発散する例を構成し実際に発散することを証明する.
また, 発散する数の相互関係を研究する.

例(10進数の場合)

•$A = 472$の場合を考える

このとき$B = 274$となり、

$D_1 = 472 + 274 = 746$

さらに、$D_2 = 746 + 647 = 1393$,

$D_3 = 1393 + 3931 = 5324$,

$D_4 = 5324 + 4235 = 9559$,

となり、回文数になった.

この操作を繰り返しても回文数にならずに発散しそうな例としては、196,285などが挙げられる．だが、これらの数が実際に発散するか否かは未だに証明されていない.

(2進数の場合)

$\bullet A = 1101$ のとき (10進表記では13)

このとき $B = 1011$ となり、

$D_1 = 1101 + 1011 = 10000,$

さらに、$D_2 = 10000 + 00001 = 10001$

となり、回文数になった.

同じく発散しそうな例として，$22, 26, 28$ などが挙げられる.

そして，2進数ならば、場合によっては発散を証明することができる.

これ以降は2進数の場合について考える.

結果

以下は，1 ～ 500で回文化操作を100回しても回文数にならない2進数を10進数で表した．

22	95	158	211	291	360	426	496
26	97	163	217	293	362	428	498
28	105	164	220	299	367	430	500
35	106	166	223	300	370	434	
37	108	169	225	302	372	436	
41	110	172	227	304	374	438	
46	116	174	228	305	378	441	
47	120	177	236	310	382	442	
49	122	180	244	315	383	444	
60	124	182	248	318	389	446	
61	125	185	251	323	393	447	
67	131	186	252	324	394	449	
75	135	190	253	329	402	465	
77	139	191	263	329	402	468	
78	141	193	267	340	405	472	
84	147	197	269	342	410	474	
86	149	199	279	346	412	476	
89	152	201	280	348	414	488	
90	155	203	281	350	417	490	
94	157	209	286	353	418	493	

ここで，22について回文化操作をしたときにその計算過程について考えてみる

・22の場合（回文化操作 計算過程）

回数　数値　(10進数→2進数)
1回目 22 [1, 0, 1, 1, 0]
2回目 35 [1, 0, 0, 0, 1, 1]
3回目 84 [1, 0, 1, 0, 1, 0, 0]
4回目 105 [1, 1, 0, 1, 0, 0, 1]
5回目 180 [1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0]
6回目 225 [1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1]
7回目 360 [1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]
8回目 405 [1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1]
⋮
28回目 393981 [1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1]
29回目 785664 [1, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
30回目 788733 [1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 1]
となる.

次に，計算過程3回目から注目してみる．3回目をA_1、4回目をB_1、5回目をC_1、6回目をD_1、7回目をA_2 ......とし、4つの周期で着目すると次の規則性を発見した.

一般項

$A_n = 101^n0100^n$
$B_n = 110^n101^{n-1}01$
$C_n = 101^n0100^n$
$D_n = 110^{n-1}10001^{n-1}1$

ここで，たとえば2進表記[1,1,1,1,0,0,1,0]ならば,1^40^210という風に指数の分だけその数が連続するという意味で定義する.

回文化操作を$\rightarrow$で示すと、$A_n\rightarrow B_n\rightarrow C_n\rightarrow D_n\rightarrow A_{n+1}$となることを数学的帰納法を用いて証明する.

＜証明＞

(i)$n=5$のとき

$A_5 = 101^5 0100^5 = 101111101000000$

となり、A_5を逆順に並び替えたものを

$\overline{A_5} = 000000101111101$

とする.

A_5を例として回文化操作をすると,

$$
\begin{array}{rrrl}
 & A_5 = & 101111101000000 & \\
+) & \overline{A_5} = & 000000101111101 & \\
\hline
 & & 110000010111101 & = B_5 \\
+) & \overline{B_5} = & 101111010000011 & \\
\hline
 & & 1011111101000000 & = C_5 \\
+) & \overline{C_5} = & 0000001011111101 & \\
\hline
 & & 1100001000111101 & = D_5 \\
+) & \overline{D_5} = & 1011110001000011 & \\
\hline
 & & 10111111011111111 & = A_6
\end{array}
$$

よって成り立つ.

(ii) $n=k$ のときを仮定して，$n=k+1$ の場合を示す.
(i) と同様にして,

$$
\begin{array}{rll}
 & A_k = & 101^k0100^k \\
+) & \overline{A_k} = & 0^k0101^k01 \\
\hline
 & & 110^k101^{k-1}01 \quad =B_k \\
+) & \overline{B_k} = & 101^{k-1}010^k11 \\
\hline
 & & 1011^k0100^k \quad =C_k \\
+) & \overline{C_k} = & 0^k0101^k101 \\
\hline
 & & 110^{k-1}10001^{k-1}01 \quad =D_k \\
+) & \overline{D_K} = & 101^{k-1}10001^{k-1}11 \\
\hline
 & & 101^{k+1}0100^{k+1} \quad =A_{k+1}
\end{array}
$$

となる．仮に $n=3$ を入れても成り立つため，n のときも成り立ち，この数列は $A_n \to B_n \to C_n \to D_n \to A_{n+1}$ という風に循環することがわかった.

わかったこと

一般項

$A_n = 101^n0100^n$
$B_n = 110^n101^{n-1}01$
$C_n = 101^n0100^n$
$D_n = 110^{n-1}10001^{n-1}1$

- これらの一般項は周期4で循環する
- 4つの一般項はどれも左右非対称な形をしている

⇒延々と回文化操作をしても回文数にはならない.

よって，22で回文化操作をすると，3工程目から周期4で循環しながら無限大へと発散する.

22のように，計算過程がある周期を描いて循環し，無限大へと発散する例は他にもたくさんある．

$$22 \to 35 \to 84 \to 105 \to 180 \to 225 \to 360 \to \cdots$$

$$26 \to 37 \to 78 \to 135 \to 360 \to \cdots$$

$$28 \to 35 \to 84 \to 105 \to 180 \to 225 \to 360 \to \cdots$$

$$35 \to 84 \to 105 \to 180 \to 225 \to 360 \to \cdots$$

$$37 \to 78 \to 135 \to 360 \to \cdots$$

$$41 \to 78 \to 135 \to 360 \to \cdots$$

$$46 \to 75 \to 180 \to 225 \to 360 \to \cdots$$

$$47 \to 108 \to 135 \to 360 \to \cdots$$

$$49 \to 84 \to 105 \to 180 \to 225 \to 360 \to \cdots$$

$$60 \to 75 \to 180 \to 225 \to 360 \to \cdots$$

$$61 \to 108 \to 135 \to 360 \to \cdots$$

$$75 \to 180 \to 225 \to 360 \to \cdots$$

$$78 \to 135 \to 360 \to \cdots$$

$$84 \to 105 \to 180 \to 225 \to 360 \to \cdots$$

22を始めとするこれらの数は，全て360に帰着することがわかる．
すなわち，これらの数はいずれ周期4で無限に循環する．

以下は，それぞれの数で回文化操作をしたときの軌跡を樹形図で表した．

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccc}
 & & & & 46 & & & & & & & & & & & & & \\
 & & & & & \searrow & & & & & & & & & & & & \\
22 & & & & & & 75 & & & & & & & & & & & \\
 & \searrow & & & & \nearrow & & \searrow & & & & & & & & & & \\
 & & 35 & & 60 & & & & 180 & \to & 225 & & & & & & & \\
 & \nearrow & & \searrow & & & & \nearrow & & & & \searrow & & & & & & \\
28 & & & & 84 & \to & 105 & & & & & & \searrow & & & & & \\
 & & & \nearrow & & & & & & & & & & \searrow & & & & \\
 & & 49 & & & & & & & & & & & & \searrow & & & \\
 & & & & & & & & & & & & & & & 360 & \longrightarrow & \cdots \\
 & & & & 26 & \to & 37 & & & & & & & & \nearrow & & & \\
 & & & & & & & \searrow & & & & & & \nearrow & & & & \\
 & & & & & & & & 78 & & & & \nearrow & & & & & \\
 & & & & & & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & & & & & \\
 & & & & & & 41 & & & & 135 & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & \nearrow & & & & & & & & \\
 & & & & & & 47 & \to & 108 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & \nearrow & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & 61 & & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

それぞれの数から回文化操作をしたとき，225 に集まるグループ $\{22,28,35,46,49,60,75,84,105,180\}$ と，135 に集まるグループ $\{26,37,41,47,61,78,108\}$ があり，その後 360 に合流し同じ軌跡を描くということがわかった．

ここで，これらのグループに属さない仲間はずれの数はどうなるのか.
77を例に挙げて考えてみる.

1回目 77 [1, 0, 0, 1, 1, 0, 1]
2回目 166 [1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0]
3回目 267 [1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1]
4回目 684 [1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 0]
5回目 897 [1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1]
6回目 1416 [1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0]
⋮

今回は4回目から$A_1, B_1, C_1, D_1, A_2 \ldots\ldots$とすると,

一般項

$$A_n = 101^n010110^{n+1}$$
$$B_n = 110^{n-1}10^51^{n-1}01$$
$$C_n = 101^{n+1}0^310^{n+2}$$
$$D_n = 110^{n+3}101^n01$$

という形になる.

　この一般項は先ほどの証明と同様に数学的帰納法で証明でき,周期 4 で循環することがわかる．そして，これらは左右非対称であるため，回文数になることはなく無限大へと発散する.

　しかし，他の数の規則性や相互関係についてはまだ調べられていないので,ここから先は次年度に研究していただけたらなと思う.