素数分母の分数の小数展開　$2d$,3,5分割和の研究

村田祐希
学習院大学理学部数学科

平成24年2月1日

目次

1　目的 **2**

2　方法 **2**

3　結果 **7**

4　考察 **16**

5　今後の課題 **42**

6　参考文献 **42**

7　感想 **43**

1 目的

はじめに、次のような例について考える.$\frac{1}{7}$ を小数展開すると、

$$\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$$

であり, 循環節は (142857) となる.
この節を 2 分割し, 足し合わせると,[142]+[857]=[999] となる. このように一般に素数 p について, 分数 $\frac{1}{p}$ を小数展開した循環節の長さが偶数のとき, その循環節を 2 分割し和を求めると 9 が並ぶことはよく知られている.(例えば,Midy による 1835 年の [1] の論文.)
$\frac{1}{p}$ を小数に展開したときの循環節の長さが N の倍数ならば, 循環節を N 個に分け, それらについて桁上がりも考えて対応する成分を加えてできた数を N 分割和と呼ぶこととする.
今回は,$\frac{a}{b}, 1 \leq a < b, (b$ は素数) を小数展開したときの,$2d$ 分割和,5 分割和,$2d-1$ 分割和,3 分割和の性質について研究する.

2 方法

swi-prolog を用いる.

```
:-dynamic cd/1.
/**1.素数の列**/
as_c(J):- ifthen(\+(cd(J)),asserta(cd(J))).
eratos(Up):- write(2),nl,
    for_step(3 =< Up,I,2),
    \+(cd(I)),
    write(I),
    write(','),
    From is I*3,
    Step is 2*I,
    for_step(From =< Up,J,Step),
    as_c(J),
    fail.
eratos(_).

ifthen(P,Q) :- P ->Q.
ifthenelse(P,Q,R):- P-> Q;R.

j(A/B):- A<B,j_aux([A/B,10],A,0).

/**2. for_step**/
for_step(I =<J,I,_):- I =< J.
for_step(I =< J,K,Step):- I =<J,T1 is I+Step,
```

```
    for_step(T1 =< J,K,Step).
```

１で出した素数をリストとし,primebox と名付けておく.

```
primebox([7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97,101,
103,107,109,113,127,131,137,139,149,151,157,163,167,173,179,181,191,193,197,199]).
```

A/B を A ＝ B*Q+R の形になおす.

```
/**3.商と余り**/
res_q(A = B*Q + R):-Q is floor(A/B),R is A - B*Q.

/**4.最大公約数**/

gcd(A=(A,0)):-!.
gcd(D=(A,B)):-B1 is A mod B,A1=B,gcd(D=(A1,B1)).

/**5.for**/
for(I=<J,I):- I=<J.
for(I=<J,K):- I=<J,I1 is I+1,for(I1=<J,K).


/**6.リストの結合と分離**/

append0(Z=[]+Z).
append0([A|Z]=[A|X]+Y):-append0(Z= X+Y).

/**7.循環節を求める**/

      /* A,B,G をまとめてくくる*/
j_aux([A/_,_],A,R):-R>0.   /** stop **/
j_aux(Const,A0,_):- Const=[_/B,G],  /** toridasu**/
                A1 is A0*G,
            res_q(A1 = B*Q +R1),
            write(Q),tab(1),
            j_aux(const,R1,R1).

/**8.A/B を G 進数で循環節に直したときのリストと長さ**/

jl(A,B,G,List,SS):- 1<B,j1_aux([A/B,G],A,0,[],List),length(List,SS),!.
j1_aux([A/_,_],A,R,L,L):-R>0,!.
j1_aux(Const,A0,_,L,W):- Const = [_/B,G],
                     A1 is A0*G,
             res_q(A1 = B*Q + R1),
```

```
            append0(L1 = L +[Q]),
            j1_aux(Const,R1,R1,L1,W).
```

/**9. リストの 2 分割和,2 分割和,3 分割和,4 分割和,5 分割和,6 分割和**/

```
left(A=[]+A,0):-!.
left(A=B+C,N):-N>0,N1 is N-1,
          left(A=B1+[X|C],N1),
          append0(B=B1+[X]),!.

nibunkatsu(L=A+B):-length(L,N),N1 is N//2,
                left(L=A+B,N1).
sanbunkatsu(L=A+B+C):-length(L,N),N1 is N//3,
                  left(L=A+D,N1),
              left(D=B+C,N1).

yonbunkatsu(L=A+B+C+D):-length(L,N),N1 is N//4,
                    left(L=A+E,N1),
            left(E=B+F,N1),
            left(F=C+D,N1).
gobunkatsu(L=A+B+C+D+E):-length(L,N),N1 is N//5,
                    left(L=A+F,N1),
            left(F=B+G,N1),
            left(G=C+H,N1),
            left(H=D+E,N1).

rokubunkatsu(L=A+B+C+D+E+F):-length(L,N),N1 is N//6,
                        left(L=A+G,N1),
                left(G=B+H,N1),
                left(H=C+I,N1),
                left(I=D+J,N1),
                left(J=E+F,N1).
```

/**10.G 進数を 10 進数で示す**/

```
g_ten(N,[N],G):- N<G.
g_ten(X,L,G):- append0(L = N + [R]),
           g_ten(Y,N,G),X is Y*G+R.
```

/**11.10 進数を G 進数で表し, リストで表記する **/

```
ten_g(N,[N],G):- N<G.
ten_g(N,L,G):-N1 is N//G,R1 is N mod G,
```

```
          ten_g(N1,L1,G),append0(L=L1+[R1]).
```

/**12. 分割和**/

```
g_sum(A=B+C,G):- g_ten(X,B,G),
             g_ten(Y,C,G),
         Z is X+Y,
         ten_g(Z,A,G),!.
```

/**13.A/B,G 進数の小数展開における循環節の長さが n の倍数のときの n 分割和 (n=2,3,4,5,6)**/

```
ni(A,B,G,Q):-jl(A,B,G,L,SS),write(L),nl,
          gcd(D2=(2,SS)),
          (D2==2 -> nibunkatsu(L=X+Y),
          g_sum(Q=X+Y,G)),
          write(Q),nl.

san(A,B,G,R):-jl(A,B,G,L,SS),write(L),nl,
          gcd(D2=(3,SS)),
          (D2==3 -> sanbunkatsu(L=X+Y+Z),
          g_sum(Q=X+Y,G),g_sum(R=Q+Z,G)),
          write(R),nl.

yon(A,B,G,S):-j1(A,B,G,L,SS),write(L),
          gcd(D2=(4,SS)),
          (D2==4 -> yonbunkatsu(L=W+X+Y+Z),
          g_sum(Q=W+X,G),g_sum(R=Q+Y,G),g_sum(S=R+Z,G)),
          write(S),nl.

go(A,B,G,T):-jl(A,B,G,L,SS),
         write(L),nl,
         gcd(D2=(5,SS)),
         (D2==5 -> gobunkatsu(L=V+W+X+Y+Z),
         g_sum(Q=V+W,G),g_sum(R=Q+X,G),g_sum(S=R+Y,G),g_sum(T=S+Z,G)),
         write(T),nl.

roku(A,B,G,P):-jl(A,B,G,L,SS),
           write(L),nl,
           gcd(D2=(6,SS)),
           (D2==6 -> rokubunkatsu(L=U+V+W+X+Y+Z),
           g_sum(Q=U+V,G),g_sum(R=Q+W,G),g_sum(S=R+X,G),g_sum(T=S+Y,G),g_sum(P=T+Z,G)),
           write(P),nl.
```

/**14.B をそれぞれ入れたときに A に 1 から B-1 をいれたときの 2 分割和,3 分割和,4 分割和,5 分割和,6 分割和**/

```
ni2(B,G,Q):- B0 is B-1,
         for(1 =<B0,A),write(A/B),ni(A,B,G,Q),fail.
ni2(_,_,_).

san2(B,G,R):- B0 is B-1,
          for(1 =<B0,A),write(A/B),san(A,B,G,R),fail.
san2(_,_,_).

yon2(B,G,S):- B0 is B-1,
          for(1 =<B0,A),write(A/B),yon(A,B,G,S),fail.

go2(B,G,T):- B0 is B-1,
         for(1 =<B0,A),write(A/B),go(A,B,G,T),fail.
go2(_,_,_).

roku2(B,G,P):- B0 is B-1,
           for(1 =<B0,A),write(A/B),roku(A,B,G,P),fail.
roku2(_,_,_).

/**15. 分子に 1 を固定したとき,G 進数の小数展開における 2 分割和,3 分割和,4 分割和,5 分割
和,6 分割和**/
ni3(G):- primebox(List),member(P,List),
         write(p=P),tab(3),ni(1,P,G,_),nl,fail.
ni3(_).

san3(G):- primebox(List),member(P,List),
          write(p=P),tab(3),san(1,P,G,_),nl,fail.
san3(_).

yon3(G):- primebox(List),member(P,List),
          write(p=P),tab(3),yon(1,P,G,_),nl,fail.
yon3(_).

go3(G):- primebox(List),member(P,List),
         write(p=P),tab(3),go(1,P,G,_),nl,fail.
go3(_).

roku3(G):- primebox(List),member(P,List),
           write(p=P),tab(3),roku(1,P,G,_),nl,fail.
roku3(_).
```

3 結果

$*$ r 分割和とは,$\frac{a}{b}, 1 \leq a < b$ を小数展開した循環節の長さが r の倍数のとき,
その循環節を r 分割し, 和を求めたものとする.

$*$ r 分割和は,$10^n - 1$ の倍数になる. この倍数を乗数 (k) という.

$*$ $m(b)$ を最初に $k = 2$ となる分子とする. 例えば $m(7) = 3$ である.

$\frac{a}{b}, 1 \leq a < b$ の 2 分割和の結果を b が小さい方から順に表にしてまとめる.

表 1: $b = 7$ における 2 分割和

a	10 進展開での循環節	10 進展開での 2 分割和	乗数
1	[1, 4, 2, 8, 5, 7]	[9, 9, 9]	1
2	[2, 8, 5, 7, 1, 4]	[9, 9, 9]	1
3	[4, 2, 8, 5, 7, 1]	[9, 9, 9]	1
4	[5, 7, 1, 4, 2, 8]	[9, 9, 9]	1
5	[7, 1, 4, 2, 8, 5]	[9, 9, 9]	1
6	[8, 5, 7, 1, 4, 2]	[9, 9, 9]	1

表 2: $b = 11$ における 2 分割和

a	10 進展開での循環節	10 進展開での 2 分割和	乗数
1	[0, 9]	[9]	1
2	[1, 8]	[9]	1
3	[2, 7]	[9]	1
4	[3, 6]	[9]	1
5	[4, 5]	[9]	1
6	[5, 4]	[9]	1
7	[6, 3]	[9]	1
8	[7, 2]	[9]	1
9	[8, 1]	[9]	1
10	[9, 0]	[9]	1

次に,$\frac{a}{b}, 1 \leq a < b$ の 4 分割和の結果を b が小さい方から順に表にしてまとめる.

表 3: $b = 17$ における 4 分割和

a	10 進展開での循環節	10 進展開での 4 分割	乗数
1	[0, 5, 8, 8, 2, 3, 5, 2, 9, 4, 1, 1, 7, 6, 4, 7]	[1, 9, 9, 9, 8]	2
2	[1, 1, 7, 6, 4, 7, 0, 5, 8, 8, 2, 3, 5, 2, 9, 4]	[1, 9, 9, 9, 8]	2
3	[1, 7, 6, 4, 7, 0, 5, 8, 8, 2, 3, 5, 2, 9, 4, 1]	[1, 9, 9, 9, 8]	2
4	[2, 3, 5, 2, 9, 4, 1, 1, 7, 6, 4, 7, 0, 5, 8, 8]	[1, 9, 9, 9, 8]	2
5	[2, 9, 4, 1, 1, 7, 6, 4, 7, 0, 5, 8, 8, 2, 3, 5]	[1, 9, 9, 9, 8]	2
6	[3, 5, 2, 9, 4, 1, 1, 7, 6, 4, 7, 0, 5, 8, 8, 2]	[1, 9, 9, 9, 8]	2
7	[4, 1, 1, 7, 6, 4, 7, 0, 5, 8, 8, 2, 3, 5, 2, 9]	[1, 9, 9, 9, 8]	2
8	[4, 7, 0, 5, 8, 8, 2, 3, 5, 2, 9, 4, 1, 1, 7, 6]	[1, 9, 9, 9, 8]	2
9	[5, 2, 9, 4, 1, 1, 7, 6, 4, 7, 0, 5, 8, 8, 2, 3]	[1, 9, 9, 9, 8]	2
10	[5, 8, 8, 2, 3, 5, 2, 9, 4, 1, 1, 7, 6, 4, 7, 0]	[1, 9, 9, 9, 8]	2
11	[6, 4, 7, 0, 5, 8, 8, 2, 3, 5, 2, 9, 4, 1, 1, 7]	[1, 9, 9, 9, 8]	2
12	[7, 0, 5, 8, 8, 2, 3, 5, 2, 9, 4, 1, 1, 7, 6, 4]	[1, 9, 9, 9, 8]	2
13	[7, 6, 4, 7, 0, 5, 8, 8, 2, 3, 5, 2, 9, 4, 1, 1]	[1, 9, 9, 9, 8]	2
14	[8, 2, 3, 5, 2, 9, 4, 1, 1, 7, 6, 4, 7, 0, 5, 8]	[1, 9, 9, 9, 8]	2
15	[8, 8, 2, 3, 5, 2, 9, 4, 1, 1, 7, 6, 4, 7, 0, 5]	[1, 9, 9, 9, 8]	2
16	[9, 4, 1, 1, 7, 6, 4, 7, 0, 5, 8, 8, 2, 3, 5, 2]	[1, 9, 9, 9, 8]	2

表 4: $b = 29$ における 4 分割和

a	10 進展開での循環節	10 進展開での 4 分割和	乗数
1	[0, 3, 4, 4, 8, 2, 7, 5, 8, 6, 2, 0, 6, 8, 9, 6, 5, 5, 1, 7, 2, 4, 1, 3, 7, 9, 3, 1]	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	2
2	[0, 6, 8, 9, 6, 5, 5, 1, 7, 2, 4, 1, 3, 7, 9, 3, 1, 0, 3, 4, 4, 8, 2, 7, 5, 8, 6, 2]	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	2
3	[1, 0, 3, 4, 4, 8, 2, 7, 5, 8, 6, 2, 0, 6, 8, 9, 6, 5, 5, 1, 7, 2, 4, 1, 3, 7, 9, 3]	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	2
4	[1, 3, 7, 9, 3, 1, 0, 3, 4, 4, 8, 2, 7, 5, 8, 6, 2, 0, 6, 8, 9, 6, 5, 5, 1, 7, 2, 4]	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	2
5	[1, 7, 2, 4, 1, 3, 7, 9, 3, 1, 0, 3, 4, 4, 8, 2, 7, 5, 8, 6, 2, 0, 6, 8, 9, 6, 5, 5]	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	2
6	[2, 0, 6, 8, 9, 6, 5, 5, 1, 7, 2, 4, 1, 3, 7, 9, 3, 1, 0, 3, 4, 4, 8, 2, 7, 5, 8, 6]	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	2
7	[2, 4, 1, 3, 7, 9, 3, 1, 0, 3, 4, 4, 8, 2, 7, 5, 8, 6, 2, 0, 6, 8, 9, 6, 5, 5, 1, 7]	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	2
8	[2, 7, 5, 8, 6, 2, 0, 6, 8, 9, 6, 5, 5, 1, 7, 2, 4, 1, 3, 7, 9, 3, 1, 0, 3, 4, 4, 8]	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	2
9	[3, 1, 0, 3, 4, 4, 8, 2, 7, 5, 8, 6, 2, 0, 6, 8, 9, 6, 5, 5, 1, 7, 2, 4, 1, 3, 7, 9]	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	2
10	[3, 4, 4, 8, 2, 7, 5, 8, 6, 2, 0, 6, 8, 9, 6, 5, 5, 1, 7, 2, 4, 1, 3, 7, 9, 3, 1, 0]	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	2
11	[3, 7, 9, 3, 1, 0, 3, 4, 4, 8, 2, 7, 5, 8, 6, 2, 0, 6, 8, 9, 6, 5, 5, 1, 7, 2, 4, 1]	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	2
12	[4, 1, 3, 7, 9, 3, 1, 0, 3, 4, 4, 8, 2, 7, 5, 8, 6, 2, 0, 6, 8, 9, 6, 5, 5, 1, 7, 2]	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	2
13	[4, 4, 8, 2, 7, 5, 8, 6, 2, 0, 6, 8, 9, 6, 5, 5, 1, 7, 2, 4, 1, 3, 7, 9, 3, 1, 0, 3]	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	2
14	[4, 8, 2, 7, 5, 8, 6, 2, 0, 6, 8, 9, 6, 5, 5, 1, 7, 2, 4, 1, 3, 7, 9, 3, 1, 0, 3, 4]	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	2
15	[5, 1, 7, 2, 4, 1, 3, 7, 9, 3, 1, 0, 3, 4, 4, 8, 2, 7, 5, 8, 6, 2, 0, 6, 8, 9, 6, 5]	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	2
16	[5, 5, 1, 7, 2, 4, 1, 3, 7, 9, 3, 1, 0, 3, 4, 4, 8, 2, 7, 5, 8, 6, 2, 0, 6, 8, 9, 6]	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	2
17	[5, 8, 6, 2, 0, 6, 8, 9, 6, 5, 5, 1, 7, 2, 4, 1, 3, 7, 9, 3, 1, 0, 3, 4, 4, 8, 2, 7]	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	2
18	[6, 2, 0, 6, 8, 9, 6, 5, 5, 1, 7, 2, 4, 1, 3, 7, 9, 3, 1, 0, 3, 4, 4, 8, 2, 7, 5, 8]	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	2
19	[6, 5, 5, 1, 7, 2, 4, 1, 3, 7, 9, 3, 1, 0, 3, 4, 4, 8, 2, 7, 5, 8, 6, 2, 0, 6, 8, 9]	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	2
20	[6, 8, 9, 6, 5, 5, 1, 7, 2, 4, 1, 3, 7, 9, 3, 1, 0, 3, 4, 4, 8, 2, 7, 5, 8, 6, 2, 0]	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	2
21	[7, 2, 4, 1, 3, 7, 9, 3, 1, 0, 3, 4, 4, 8, 2, 7, 5, 8, 6, 2, 0, 6, 8, 9, 6, 5, 5, 1]	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	2
22	[7, 5, 8, 6, 2, 0, 6, 8, 9, 6, 5, 5, 1, 7, 2, 4, 1, 3, 7, 9, 3, 1, 0, 3, 4, 4, 8, 2]	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	2
23	[7, 9, 3, 1, 0, 3, 4, 4, 8, 2, 7, 5, 8, 6, 2, 0, 6, 8, 9, 6, 5, 5, 1, 7, 2, 4, 1, 3]	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	2
24	[8, 2, 7, 5, 8, 6, 2, 0, 6, 8, 9, 6, 5, 5, 1, 7, 2, 4, 1, 3, 7, 9, 3, 1, 0, 3, 4, 4]	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	2
25	[8, 6, 2, 0, 6, 8, 9, 6, 5, 5, 1, 7, 2, 4, 1, 3, 7, 9, 3, 1, 0, 3, 4, 4, 8, 2, 7, 5]	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	2
26	[8, 9, 6, 5, 5, 1, 7, 2, 4, 1, 3, 7, 9, 3, 1, 0, 3, 4, 4, 8, 2, 7, 5, 8, 6, 2, 0, 6]	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	2
27	[9, 3, 1, 0, 3, 4, 4, 8, 2, 7, 5, 8, 6, 2, 0, 6, 8, 9, 6, 5, 5, 1, 7, 2, 4, 1, 3, 7]	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	2
28	[9, 6, 5, 5, 1, 7, 2, 4, 1, 3, 7, 9, 3, 1, 0, 3, 4, 4, 8, 2, 7, 5, 8, 6, 2, 0, 6, 8]	[1, 9, 9, 9, 9, 9, 9, 8]	2

次に,$\frac{a}{b}, 1 \leq a < b$ の 6 分割和の結果を b が小さい方から順に表にしてまとめる.

表 5: $b = 7$ における 6 分割和

a	10 進展開での循環節	10 進展開での 6 分割和	乗数
1	[1, 4, 2, 8, 5, 7]	[2, 7]	3
2	[2, 8, 5, 7, 1, 4]	[2, 7]	3
3	[4, 2, 8, 5, 7, 1]	[2, 7]	3
4	[5, 7, 1, 4, 2, 8]	[2, 7]	3
5	[7, 1, 4, 2, 8, 5]	[2, 7]	3
6	[8, 5, 7, 1, 4, 2]	[2, 7]	3

表 6: $b = 13$ における 6 分割和

a	10 進展開での循環節	10 進展開での 6 分割和	乗数
1	[0, 7, 6, 9, 2, 3]	[2, 7]	3
2	[1, 5, 3, 8, 4, 6]	[2, 7]	3
3	[2, 3, 0, 7, 6, 9]	[2, 7]	3
4	[3, 0, 7, 6, 9, 2]	[2, 7]	3
5	[3, 8, 4, 6, 1, 5]	[2, 7]	3
6	[4, 6, 1, 5, 3, 8]	[2, 7]	3
7	[5, 3, 8, 4, 6, 1]	[2, 7]	3
8	[6, 1, 5, 3, 8, 4]	[2, 7]	3
9	[6, 9, 2, 3, 0, 7]	[2, 7]	3
10	[7, 6, 9, 2, 3, 0]	[2, 7]	3
11	[8, 4, 6, 1, 5, 3]	[2, 7]	3
12	[9, 2, 3, 0, 7, 6]	[2, 7]	3

次に,$\dfrac{a}{b}, 1 \leq a < b$ の 5 分割和の結果を b が小さい方から順に表にしてまとめる.

表 7: $b = 31$ における 5 分割和

a	10 進展開での循環節	10 進展開での 5 分割和	乗数
1	[0, 3, 2, 2, 5, 8, 0, 6, 4, 5, 1, 6, 1, 2, 9]	[9, 9, 9]	1
2	[0, 6, 4, 5, 1, 6, 1, 2, 9, 0, 3, 2, 2, 5, 8]	[9, 9, 9]	1
3	[0, 9, 6, 7, 7, 4, 1, 9, 3, 5, 4, 8, 3, 8, 7]	[1, 9, 9, 8]	2
4	[1, 2, 9, 0, 3, 2, 2, 5, 8, 0, 6, 4, 5, 1, 6]	[9, 9, 9]	1
5	[1, 6, 1, 2, 9, 0, 3, 2, 2, 5, 8, 0, 6, 4, 5]	[1, 9, 9, 8]	2
6	[1, 9, 3, 5, 4, 8, 3, 8, 7, 0, 9, 6, 7, 7, 4]	[1, 9, 9, 8]	2
7	[2, 2, 5, 8, 0, 6, 4, 5, 1, 6, 1, 2, 9, 0, 3]	[2, 9, 9, 7]	3
8	[2, 5, 8, 0, 6, 4, 5, 1, 6, 1, 2, 9, 0, 3, 2]	[9, 9, 9]	1
9	[2, 9, 0, 3, 2, 2, 5, 8, 0, 6, 4, 5, 1, 6, 1]	[1, 9, 9, 8]	2
10	[3, 2, 2, 5, 8, 0, 6, 4, 5, 1, 6, 1, 2, 9, 0]	[1, 9, 9, 8]	2
11	[3, 5, 4, 8, 3, 8, 7, 0, 9, 6, 7, 7, 4, 1, 9]	[2, 9, 9, 7]	3
12	[3, 8, 7, 0, 9, 6, 7, 7, 4, 1, 9, 3, 5, 4, 8]	[1, 9, 9, 8]	2
13	[4, 1, 9, 3, 5, 4, 8, 3, 8, 7, 0, 9, 6, 7, 7]	[2, 9, 9, 7]	3
14	[4, 5, 1, 6, 1, 2, 9, 0, 3, 2, 2, 5, 8, 0, 6]	[2, 9, 9, 7]	3
15	[4, 8, 3, 8, 7, 0, 9, 6, 7, 7, 4, 1, 9, 3, 5]	[3, 9, 9, 6]	4
16	[5, 1, 6, 1, 2, 9, 0, 3, 2, 2, 5, 8, 0, 6, 4]	[9, 9, 9]	1
17	[5, 4, 8, 3, 8, 7, 0, 9, 6, 7, 7, 4, 1, 9, 3]	[1, 9, 9, 8]	2
18	[5, 8, 0, 6, 4, 5, 1, 6, 1, 2, 9, 0, 3, 2, 2]	[1, 9, 9, 8]	2
19	[6, 1, 2, 9, 0, 3, 2, 2, 5, 8, 0, 6, 4, 5, 1]	[2, 9, 9, 7]	3
20	[6, 4, 5, 1, 6, 1, 2, 9, 0, 3, 2, 2, 5, 8, 0]	[1, 9, 9, 8]	2
21	[6, 7, 7, 4, 1, 9, 3, 5, 4, 8, 3, 8, 7, 0, 9]	[2, 9, 9, 7]	3
22	[7, 0, 9, 6, 7, 7, 4, 1, 9, 3, 5, 4, 8, 3, 8]	[2, 9, 9, 7]	3
23	[7, 4, 1, 9, 3, 5, 4, 8, 3, 8, 7, 0, 9, 6, 7]	[3, 9, 9, 6]	4
24	[7, 7, 4, 1, 9, 3, 5, 4, 8, 3, 8, 7, 0, 9, 6]	[1, 9, 9, 8]	2
25	[8, 0, 6, 4, 5, 1, 6, 1, 2, 9, 0, 3, 2, 2, 5]	[2, 9, 9, 7]	3
26	[8, 3, 8, 7, 0, 9, 6, 7, 7, 4, 1, 9, 3, 5, 4]	[2, 9, 9, 7]	3
27	[8, 7, 0, 9, 6, 7, 7, 4, 1, 9, 3, 5, 4, 8, 3]	[3, 9, 9, 6]	4
28	[9, 0, 3, 2, 2, 5, 8, 0, 6, 4, 5, 1, 6, 1, 2]	[2, 9, 9, 7]	3
29	[9, 3, 5, 4, 8, 3, 8, 7, 0, 9, 6, 7, 7, 4, 1]	[3, 9, 9, 6]	4
30	[9, 6, 7, 7, 4, 1, 9, 3, 5, 4, 8, 3, 8, 7, 0]	[3, 9, 9, 6]	4

表 8: $b = 41$ における 5 分割和

a	10 進展開での循環節	10 進展開での 5 分割和	乗数
1	[0, 2, 4, 3, 9]	[1, 8]	2
2	[0, 4, 8, 7, 8]	[2, 7]	3
3	[0, 7, 3, 1, 7]	[1, 8]	2
4	[0, 9, 7, 5, 6]	[2, 7]	3
5	[1, 2, 1, 9, 5]	[1, 8]	2
6	[1, 4, 6, 3, 4]	[1, 8]	2
7	[1, 7, 0, 7, 3]	[1, 8]	2
8	[1, 9, 5, 1, 2]	[1, 8]	2
9	[2, 1, 9, 5, 1]	[1, 8]	2
10	[2, 4, 3, 9, 0]	[1, 8]	2
11	[2, 6, 8, 2, 9]	[2, 7]	3
12	[2, 9, 2, 6, 8]	[2, 7]	3
13	[3, 1, 7, 0, 7]	[1, 8]	2
14	[3, 4, 1, 4, 6]	[1, 8]	2
15	[3, 6, 5, 8, 5]	[2, 7]	3
16	[3, 9, 0, 2, 4]	[1, 8]	2
17	[4, 1, 4, 6, 3]	[1, 8]	2
18	[4, 3, 9, 0, 2]	[1, 8]	2
19	[4, 6, 3, 4, 1]	[1, 8]	2
20	[4, 8, 7, 8, 0]	[2, 7]	3
21	[5, 1, 2, 1, 9]	[1, 8]	2
22	[5, 3, 6, 5, 8]	[2, 7]	3
23	[5, 6, 0, 9, 7]	[2, 7]	3
24	[5, 8, 5, 3, 6]	[2, 7]	3
25	[6, 0, 9, 7, 5]	[2, 7]	3
26	[6, 3, 4, 1, 4]	[1, 8]	2
27	[6, 5, 8, 5, 3]	[2, 7]	3
28	[6, 8, 2, 9, 2]	[2, 7]	3
29	[7, 0, 7, 3, 1]	[1, 8]	2
30	[7, 3, 1, 7, 0]	[1, 8]	2
31	[7, 5, 6, 0, 9]	[2, 7]	3
32	[7, 8, 0, 4, 8]	[2, 7]	3
33	[8, 0, 4, 8, 7]	[2, 7]	3
34	[8, 2, 9, 2, 6]	[2, 7]	3
35	[8, 5, 3, 6, 5]	[2, 7]	3
36	[8, 7, 8, 0, 4]	[2, 7]	3
37	[9, 0, 2, 4, 3]	[1, 8]	2
38	[9, 2, 6, 8, 2]	[2, 7]	3
39	[9, 5, 1, 2, 1]	[1, 8]	2
40	[9, 7, 5, 6, 0]	[2, 7]	3

次に,$\frac{a}{b}, 1 \leq a < b$ の 3 分割和の結果を表にしてまとめる.
$\frac{a}{b}$ の 3 分割和の乗数は,1 または 2 である.$b = 200$ までの $m(b) = a$ の表 (①), ある分母 b に対し乗数が 2 になる分子 a の表 (②) を得た.

表 9: 3 分割和①

分母 b	$m(b) = a$
7	3
13	4
19	5
31	6
37	7
43	7
61	9
67	9
97	11
103	11
109	12
127	13
151	14
157	13
163	14
181	15
193	16
199	15

表 10: 3 分割和②

分母 b	乗数が 2 になる分子 a
7	3, 5, 6
13	4, 7, 8, 10, 11, 12
19	5, 8, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 18
31	6, 11, 12, 16, 17, 18, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30
37	7, 11, 14, 17, 18, 21, 22, 24, 25, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36
43	7, 13, 14, 19, 20, 21, 25, 26, 27, 28, 31, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 42
61	9, 14, 18, 22, 23, 27, 28, 31, 32, 35, 36, 37, 40, 41, 42, 44, 45, 46, 48, 49, 50, 51, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60
67	9, 16, 18, 23, 25, 27, 30, 32, 34 ,36 ,38, 39, 41, 43, 45, 47, 48, 50, 52, 53, 56, 55, 56, 57, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66
97	11, 19, 22, 27, 30, 33, 36, 38, 41, 44, 46, 47, 49, 52, 54, 55, 57, 58, 59, 60, 68, 69, 71, 72, 73, 74, 76, 77, 79, 80, 81 ,82, 83, 84, 85, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96

表を観察した結果をもとに, 次の事柄が証明できた. それを定理として述べる.
① 2 分割和は $10^n - 1$ になる. すなわち,$k = 1$
② 4 分割和は $(10^n - 1) \times 2$ になる. すなわち,$k = 2$
③ 6 分割和は $(10^n - 1) \times 3$ になる. すなわち,$k = 3$
④ $2d$ 分割和は $(10^n - 1) \times d$ になる. すなわち,$k = d$
⑤ 5 分割和の乗数は $k = 1$ または $k = 2$ または $k = 3$ または $k = 4$ になる.
また,$\frac{a}{b}$ の乗数と,$\frac{b-a}{b}$ の乗数をたすと,5 になる.
⑥ $2d - 1$ 分割和の乗数は $k = t(1 \leq t \leq 2(d-1))$ になる.
⑦ $m(b) = a$ がわかれば b が求められる.
ここでは, 乗数が 2 になる最初の分子 a を与えるとき, 分母 b を数学的に求めることを試みた.
その結果,$a = 15$ のとき $b = 181, 199$ 以外に、$b = 211$ もあり, これで尽きることが証明できた.

4　考察

【$2d$ 分割和】

$\dfrac{a}{b}$ を g 進展開する (b は素数,$1 \leq a < b$,g は b で割れない).
ga を b で割って商を q, 余りを r_1 とすると,

$$ga = q_1 b + r_1$$
$$gr_1 = q_2 b + r_2$$
$$gr_2 = q_3 b + r_3$$
$$\vdots$$

これらの式を b を法として見直す.

$$ga \equiv r_1 \qquad \mod b \qquad \cdots\cdots(1)$$
$$gr_1 \equiv r_2 \qquad \mod b \qquad \cdots\cdots(2)$$
$$gr_2 \equiv r_3 \qquad \mod b$$
$$\vdots$$

(1),(2) より,

$$g^2 a \equiv r_2$$

これから $g^j a \equiv r_j$ になることがわかる.
余りは b 未満の数であり $b-1$ 個しか値を取り得ないので, 必ず同じ余りがでてくる.
したがって,$i < j$ があって $r_i = r_j$.
ここで b を法としてみると,

$$g^i a \equiv r_i = r_j = g^j a \qquad \mod b$$

これより,

$$g^j a - g^i a \equiv (g^j - g^i)a \equiv 0 \qquad \mod b$$

a,b は互いに素なので a は mod$b$ での逆元がある. これをかけると,

$$g^j - g^i \equiv 0 \qquad \mod b$$

g,b は互いに素なので g は mod$b$ での逆元 v がある.v^i をかけると,

$$g^{j-i} - 1 \equiv 0 \qquad \mod b$$

　$\therefore$　$g^u \equiv 1$ となる $u > 0$ が存在する.
$u = 2dm$ のとき,

$$g^{2dm} - 1 \equiv 0 \qquad \mod b$$

b は素数であるから,

$$1 + g^m + g^{2m} + g^{3m} + \cdots + g^{2dm-1} \equiv 0 \qquad \mod b$$

$$gr_j = q_{j+1}b + r_{j+1}$$
$$gr_{j+m} = q_{j+m+1}b + r_{j+m+1}$$
$$gr_{j+2m} = q_{j+2m+1}b + r_{j+2m+1}$$
$$\vdots$$
$$gr_{j+2dm-1} = q_{j+2dm}b + r_{j+2dm}$$

ここで,

$$R_j = r_j + r_{j+m} + r_{j+2m} + \cdots + r_{j+2dm-1}$$
$$Q_j = q_j + q_{j+m} + q_{j+2m} + \cdots + q_{j+2dm-1}$$

として辺々足し合わせると,

$$gR_j = bQ_{j+1} + R_{j+1}$$

となる.
それぞれ,
$j = 0$ のとき

$$gR_0 = bQ_1 + R_1$$

$j = 1$ のとき

$$gR_1 = bQ_2 + R_2$$

$\vdots$

$$\vdots$$

$j = m - 1$ のとき

$$gR_{m-1} = bQ_m + R_m$$

$R_m = r_m + r_{2m} + \cdots + r_{2dm}$ なので,

$$r_{2dm} \equiv ag^{2dm} \mod b$$
$$r_{2dm} = r_0 = a$$
$$\therefore \quad r_{2dm} = a$$

$$\begin{array}{rrcccc}
 & g^m R_0 & = & bg^{m-1}Q_1 & + & g^{m-1}R_1 \\
 & & \vdots & & & \\
 & g^3 R_{m-3} & = & bg^2 Q_{m-2} & + & g^2 R_{m-2} \\
 & g^2 R_{m-2} & = & bgQ_{m-1} & + & gR_{m-1} \\
+) & gR_{m-1} & = & bQ_m & + & g^2 R_m \\
\hline
 & g^m R_0 & = & b(g^{m-1}Q_1 & + & \cdots + gQ_{m-1} + Q_m) + R_m
\end{array}$$

$R_0 = r_0 + r_m + \cdots + r_{2dm-1} = r_m + r_{2m} + \cdots + r_{2dm} = R_m$ なので,

$$(g^m - 1)\frac{R_0}{b} = (g^{m-1}Q_1 + \cdots + gQ_{m-1} + Q_m) \quad \cdots (*)$$

↑右辺は $< Q_1, Q_2, \cdots, Q_m >_g$ となり, 今回は 10 進法を用いているため, 結果が得られる. つまり, 左辺が $(10^n - 1) \times d$ になることが言えればよい.
ここで,

$$\begin{aligned} R_0 &= r_0 + r_m + \cdots + r_{2dm-1} \\ &\equiv a + ag^m + \cdots ag^{2dm-1} \\ &= a(1 + g^m + \cdots + g^{2dm-1}) \equiv 0 \qquad \mod b \end{aligned}$$

よって,

$$R_0 \equiv 0 \qquad \mod b$$

これは $R_0 = k_0 b$ とかける. $R_j = k_j b$ として一般化しておく.
$r_j < b$ より, $1 \leq k_j \leq 2d - 1$
$u = 2dm = 2(dm)$ なので,

$$r_j = ag^j \ , \ dm = m'$$

とすると,

$$r_{j+m'} + r_j = b$$

$$\because \ r_{m'} \equiv ag^{m'} \equiv -a$$

$$r_0 = a \quad \text{より,}$$

$$r_0 + r_{m'} \equiv a + (-a) \equiv 0$$

$$r_0 + r_{m'} < 2b$$

$$\therefore r_0 + r_{m'} = b$$

$$r_0\text{を一般化し,}r_j\text{としても同じ.}$$

より,

$$r_0 + r_{dm} = b \ , \ r_m + r_{m+dm} = b \ , \ \cdots \ , \ r_{dm+m} + r_{2m-m} = b$$

$$\therefore R_0 = db$$

(*) の左辺に $R_0 = db$ を代入すると,

$$(g^m - 1)\frac{db}{b} = (g^m - 1) \times d$$

となり,$\dfrac{a}{b}$,$1 \leq a < b$ の $2d$ 分割和は,9 が並んだ数の d 倍 $(10^n - 1) \times d$ であることが示せた.

【5 分割和】

$\dfrac{a}{b}$ を g 進展開する (b は素数,$1 \leq a < b$,g は b で割れない).
ga を b で割って商を q, 余りを r_1 とすると,

$$ga = q_1 b + r_1$$

$$gr_1 = q_2 b + r_2$$

$$\vdots$$

循環節の長さを u とすると,

$$g^u \equiv 1 \qquad \mod b$$

$u = 5m$ のとき,

$$g^{5m} - 1 \equiv 0 \qquad \mod b$$

b は素数であるから,

$$1 + g^m + g^{2m} + g^{3m} + g^{4m} \equiv 0 \qquad \mod b$$

$$gr_j = q_{j+1} b + r_{j+1}$$

$$gr_{j+m} = q_{j+m+1} b + r_{j+m+1}$$

$$gr_{j+2m} = q_{j+2m+1} b + r_{j+2m+1}$$

$$gr_{j+3m} = q_{j+3m+1} b + r_{j+3m+1}$$

$$gr_{j+4m} = q_{j+4m+1} b + r_{j+4m+1}$$

ここで,

$$R_j = r_j + r_{j+m} + r_{j+2m} + r_{j+3m} + r_{j+4m}$$

$$Q_j = q_j + q_{j+m} + q_{j+2m} + q_{j+3m} + q_{j+4m}$$

として辺々足し合わせると,

$$gR_j = bQ_{j+1} + R_{j+1}$$

となる.
それぞれ,
$j = 0$ のとき

$$gR_0 = bQ_1 + R_1$$

$j = 1$ のとき

$$gR_1 = bQ_2 + R_2$$

$\vdots$

$$\vdots$$

$j = m - 1$ のとき

$$gR_{m-1} = bQ_m + R_m$$

$R_m = r_m + r_{2m} + r_{3m} + r_{4m} + r_{5m}$ なので,

$$r_{5m} \equiv ag^{5m} \qquad \bmod b$$
$$r_{5m} = r_0 = a$$
$$\therefore \quad r_{5m} = a$$

$$\begin{array}{rrcccc}
 & g^m R_0 & = & bg^{m-1}Q_1 & + & g^{m-1}R_1 \\
 & & \vdots & & & \\
 & g^3 R_{m-3} & = & bg^2 Q_{m-2} & + & g^2 R_{m-2} \\
 & g^2 R_{m-2} & = & bgQ_{m-1} & + & gR_{m-1} \\
+) & gR_{m-1} & = & bQ_m & + & g^2 R_m \\
\hline
 & g^m R_0 & = & b(g^{m-1}Q_1 & + & \cdots + gQ_{m-1} + Q_m) + R_m
\end{array}$$

$R_0 = r_0 + r_m + r_{2m} + r_{3m} + r_{4m} = r_m + r_{2m} + r_{3m} + r_{4m} + r_{5m} = R_m$ なので,

$$(g^m - 1)\frac{R_0}{b} = (g^{m-1}Q_1 + \cdots + gQ_{m-1} + Q_m) \quad \cdots(*)$$

↑右辺は $< Q_1, Q_2, \cdots, Q_m >_g$ となり, 今回は 10 進法を用いているため, 結果が得られる.
つまり, 左辺が $(10^n - 1) \times n$ になることが言えればよい.
ここで,

$$\begin{aligned}
R_0 &= r_0 + r_m + r_{2m} + r_{3m} + r_{4m} \\
&\equiv a + ag^m + ag^{2m} + ag^{3m} + ag^{4m} \\
&= a(1 + g^m + g^{2m} + g^{3m} + g^{4m}) \equiv 0 \qquad \bmod b
\end{aligned}$$

よって,

$$R_0 \equiv 0 \qquad \bmod b$$

これは $R_0 = k_0 b$ と書ける． $R_j = k_j b$ として一般化しておく.
$r_j < b$ より， $1 \leq k_j \leq 4$

$$\frac{r_j}{b} + \frac{r_{j'}}{b} = 1$$

$$\begin{array}{rccccc l}
 & r_j & + & r_{j'} & = & b & \\
 & r_{j+m} & + & r_{j'+m} & = & b & (\because \text{相補性の平行性より}) \\
 & r_{j+2m} & + & r_{j'+2m} & = & b & \\
 & r_{j+3m} & + & r_{j'+3m} & = & b & \\
+) & r_{j+4m} & + & r_{j'+4m} & = & b & \\
\hline
 & k_j b & + & k_{j'} b & = & 5b &
\end{array}$$

$$k_j + k_{j'} = 5$$

$\dfrac{a}{b}, 1 \leq a < b$ の 5 分割和は,9 が並んだ数の 1,2,3,4 倍 $(10^n - 1) \times t (1 \leq t \leq 4)$ であることが示せた.

【$2d-1$ 分割和】
$\dfrac{a}{b}$ を g 進展開する (b は素数,$1 \leq a < b$,g は b で割れない).
ga を b で割って商を q, 余りを r_1 とすると,

$$ga = q_1 b + r_1$$

$$gr_1 = q_2 b + r_2$$

$$\vdots$$

循環節の長さを u とすると,

$$g^u \equiv 1 \qquad \mod b$$

$u = (2d-1)m$ のとき,$g^{(2d-1)m} - 1 \equiv 0 \qquad \mod b$ より,b は素数であるから,

$$1 + g^m + g^{2m} + g^{3m} + \cdots + g^{(2d-1)m-1} \equiv 0 \qquad \mod b$$

$$gr_j = q_{j+1} b + r_{j+1}$$

$$gr_{j+m} = q_{j+m+1} b + r_{j+m+1}$$

$$gr_{j+2m} = q_{j+2m+1} b + r_{j+2m+1}$$

$$\vdots$$

$$gr_{j+(2d-1)m-1} = q_{j+(2d-1)m} b + r_{j+(2d-1)m}$$

ここで,

$$R_j = r_j + r_{j+m} + r_{j+2m} + \cdots + r_{j+2(d-1)m}$$

$$Q_j = q_j + q_{j+m} + q_{j+2m} + \cdots + q_{j+2(d-1)m}$$

として辺々足し合わせると,

$$gR_j = bQ_{j+1} + R_{j+1}$$

となる.
それぞれ,
$j = 0$ のとき

$$gR_0 = bQ_1 + R_1$$

$j = 1$ のとき

$$gR_1 = bQ_2 + R_2$$

$\vdots$

$$\vdots$$

$j = m-1$ のとき

$$gR_{m-1} = bQ_m + R_m$$

$R_m = r_m + r_{2m} + \cdots + r_{(2d-1)m}$ なので,

$$r_{(2d-1)m} \equiv ag^{(2d-1)m} \qquad \mod b$$

$$r_{(2d-1)m} = r_0 = a$$
$$\therefore \quad r_{(2d-1)m} = a$$

$$\begin{array}{rrcccc}
 & g^m R_0 & = & bg^{m-1}Q_1 & + & g^{m-1}R_1 \\
 & & \vdots & & & \\
 & g^3 R_{m-3} & = & bg^2 Q_{m-2} & + & g^2 R_{m-2} \\
 & g^2 R_{m-2} & = & bgQ_{m-1} & + & gR_{m-1} \\
+) & gR_{m-1} & = & bQ_m & + & g^2 R_m \\
\hline
 & g^m R_0 & = & b(g^{m-1}Q_1 & + & \cdots + gQ_{m-1} + Q_m) + R_m
\end{array}$$

$R_0 = r_0 + r_m + \cdots + r_{(2d-1)m-1} = r_m + r_{2m} + \cdots + r_{(2d-1)m} = R_m$ なので,

$$(g^m - 1)\frac{R_0}{b} = (g^{m-1}Q_1 + \cdots + gQ_{m-1} + Q_m) \quad \cdots (*)$$

↑右辺は $< Q_1, Q_2, \cdots, Q_m >_g$ となり, 今回は 10 進法を用いているため, 結果が得られる.
つまり, 左辺が $(10^n - 1) \times 2(d-1)$ になることが言えればよい.
ここで,

$$\begin{aligned}
R_0 &= r_0 + r_m + \cdots + r_{(2d-1)m-1} \\
&\equiv a + ag^m + \cdots ag^{(2d-1)m-1} \\
&= a(1 + g^m + \cdots + g^{(2d-1)m-1}) \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\ b
\end{aligned}$$

よって,

$$R_0 \equiv 0 \qquad \mathrm{mod}\ b$$

これは $R_0 = k_0 b$ と書ける. $R_j = k_j b$ として一般化しておく.
$r_j < b$ より, $1 \leq k_j \leq 2(d-1)$

$$\frac{r_j}{b} + \frac{r_{j'}}{b} = 1$$

$\dfrac{a}{b}, 1 \leq a < b$ の $2d-1$ 分割和は,9 が並んだ数の 1〜$2(d-1)$ 倍 $(10^n - 1) \times t(1 \leq t \leq 2(d-1))$ であることが示せた.

【3 分割和】
以下, 分母 b は素数なので p に置き換える.

○ $m(b)=3$ となる b を求める.
$r_j=3$ とする.

$$3+r_{j+m}+r_{j+2m}=2p$$

$r_{j+m}=p-1,\quad r_{j+2m}=p-2$ とする.

$$p-1=r_{j+m}\equiv 3g^m$$

$$p-2=r_{j+2m}\equiv 3g^{2m}$$

$-1\equiv 3g^m$ を 2 乗すると,

$$1\equiv 9g^{2m}=3\cdot 3g^{2m}=-6$$

$$7\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

$7=pk$ となる k がある. ここで 7 は素数なので,

$$p=7$$

$a=3$ で乗数がはじめて 2 になるのは,$\dfrac{3}{7}$ のとき

○ $m(b)=4$ となる b を求める.
$r_j=4$ とする.

$$4+r_{j+m}+r_{j+2m}=2p$$

$r_{j+m}=p-1,\quad r_{j+2m}=p-3$ とする.

$$p-1=r_{j+m}\equiv 4g^m$$

$$p-3=r_{j+2m}\equiv 4g^{2m}$$

$-1\equiv 4g^m$ を 2 乗すると,

$$1\equiv 16g^{2m}=4\cdot 4g^{2m}=-12$$

$$13\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

$$p=13$$

$a=4$ で乗数がはじめて 2 になるのは,$\dfrac{4}{13}$ のとき

○ $m(b)=5$ となる b を求める.

$r_j=5$ とする.

$$5+r_{j+m}+r_{j+2m}=2p$$

1) $r_{j+m}=p-1,\quad r_{j+2m}=p-4$ とする.

$$p-1=r_{j+m}\equiv 5g^m$$

$$p-4=r_{j+2m}\equiv 5g^{2m}$$

$-1\equiv 5g^m$ を 2 乗すると,

$$1\equiv 25g^{2m}=5\cdot 5g^{2m}=-20$$

$$21\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

$$21=pk$$

$21=3\cdot 7$ なので $p=7$ になる.

しかし、$\frac{3}{7}$ で乗数が 2 になるので,$\frac{5}{7}$ ははじめて 2 になる数ではない.

よってこの場合は成り立たない.

2) $r_{j+m}=p-2,\quad r_{j+2m}=p-3$ とする.

$$p-2=r_{j+m}\equiv 5g^m$$

$$p-3=r_{j+2m}\equiv 5g^{2m}$$

$-2=5g^m$ を 2 乗すると,

$$4\equiv 25g^{2m}=5\cdot 5g^{2m}=-15$$

$$19\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

$$p=19$$

$a=5$ で乗数がはじめて 2 になるのは,$\dfrac{5}{19}$ のとき

○ $m(b)=6$ となる b を求める.

$r_j=6$ とする.

$$6+r_{j+m}+r_{j+2m}=2p$$

1) $r_{j+m}=p-1,\quad r_{j+2m}=p-5$ とする.

$$p-1=r_{j+m}\equiv 6g^m$$

$$p-5=r_{j+2m}\equiv 6g^{2m}$$

$-1\equiv 6g^m$ を 2 乗すると,

$$1\equiv 36g^{2m}=6\cdot 6g^{2m}=-30$$

$$31\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

$$p=31$$

2) $r_{j+m}=p-2,\quad r_{j+2m}=p-4$ とする.

$$p-2=r_{j+m}\equiv 6g^m$$

$$p-4=r_{j+2m}\equiv 6g^{2m}$$

$-2\equiv 6g^m$ を 2 乗すると,

$$4\equiv 35g^{2m}=6\cdot 6g^{2m}=-24$$

$$28\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

$28=2^2\cdot 7=pk$ とかけるので,$p=7$

同様に, この場合は成り立たない.

$a=6$ で乗数がはじめて 2 になるのは,$\dfrac{6}{31}$ のとき

○ $m(b)=7$ となる b を求める.

$r_j=7$ とする.

$$7+r_{j+m}+r_{j+2m}=2p$$

1) $r_{j+m}=p-1,\quad r_{j+2m}=p-6$ とする.

$$p-1=r_{j+m}\equiv 7g^m$$

$$p-6=r_{j+2m}\equiv 7g^{2m}$$

$-1\equiv 7g^m$ を 2 乗すると,

$$1\equiv 49g^{2m}=7\cdot 7g^{2m}=-42$$

$$43\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

$$p=43$$

2) $r_{j+m}=p-2,\quad r_{j+2m}=p-5$ とする.

$$p-2=r_{j+m}\equiv 7g^m$$

$$p-5=r_{j+2m}\equiv 7g^{2m}$$

$-2\equiv 7g^m$ を 2 乗すると,

$$4\equiv 49g^{2m}=7\cdot 7g^{2m}=-35$$

$$39\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

$39=3\cdot 13=pk$ とかけるので,$p=13$
同様に, この場合は成り立たない.

3) $r_{j+m}=p-3,\quad r_{j+2m}=p-4$ とする.

$$p-3=r_{j+m}\equiv 7g^m$$

$$p-4=r_{j+2m}\equiv 7g^{2m}$$

$-3\equiv 7g^m$ を 2 乗すると,

$$9\equiv 49g^{2m}=7\cdot 7g^{2m}=-28$$

$$37\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

$$p=37$$

$a=7$ で乗数が 2 が出てくるのは,$\dfrac{7}{37},\dfrac{7}{43}$ のとき

○ $m(b)=9$ となる b を求める.

$r_j=9$ とする.

$$9+r_{j+m}+r_{j+2m}=2p$$

1) $r_{j+m}=p-1,\quad r_{j+2m}=p-8$ とする.

$$p-1=r_{j+m}\equiv 9g^m$$

$$p-8=r_{j+2m}\equiv 9g^{2m}$$

$-1\equiv 9g^m$ を 2 乗すると,

$$1\equiv 81g^{2m}=9\cdot 9g^{2m}=-72$$

$$73\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

$p=73$ は 3 分割できないので成り立たない.

2) $r_{j+m}=p-2,\quad r_{j+2m}=p-7$ とする.

$$p-2=r_{j+m}\equiv 9g^m$$

$$p-7=r_{j+2m}\equiv 9g^{2m}$$

$-2\equiv 9g^m$ を 2 乗すると,

$$4\equiv 81g^{2m}=9\cdot 9g^{2m}=-63$$

$$67\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

$$p=67$$

3) $r_{j+m}=p-3,\quad r_{j+2m}=p-6$ とする.

$$p-3=r_{j+m}\equiv 9g^m$$

$$p-6=r_{j+2m}\equiv 9g^{2m}$$

$-3\equiv 9g^m$ を 2 乗すると,

$$9\equiv 81g^{2m}=9\cdot 9g^{2m}=-54$$

$$63\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

$63=7\cdot 9$ なのでこの場合は成り立たない.

4) $r_{j+m}=p-4,\quad r_{j+2m}=p-5$ とする.

$$p-4=r_{j+m}\equiv 9g^m$$

$$p-5=r_{j+2m}\equiv 9g^{2m}$$

$-4\equiv 9g^m$ を 2 乗すると,

$$16\equiv 81g^{2m}=9\cdot 9g^{2m}=-45$$

$$61\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

$$p=61$$

$a=9$ で乗数がはじめて 2 になるのは,$\dfrac{9}{61},\dfrac{9}{67}$ のとき

○ $m(b)=11$ となる b を求める.
$r_j=11$ とする.

$$11+r_{j+m}+r_{j+2m}=2p$$

1) $r_{j+m}=p-1,\quad r_{j+2m}=p-10$ とする.

$$p-1=r_{j+m}\equiv 11g^m$$

$$p-10=r_{j+2m}\equiv 11g^{2m}$$

$-1\equiv 11g^m$ を 2 乗すると,

$$1\equiv 121g^{2m}=11\cdot 11g^{2m}=-110$$

$$111\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

$111=3\cdot 37=pk$ とかけるので,$p=37$
同様に, この場合は成り立たない.

2) $r_{j+m}=p-2,\quad r_{j+2m}=p-9$ とする.

$$p-2=r_{j+m}\equiv 11g^m$$

$$p-9=r_{j+2m}\equiv 11g^{2m}$$

$-2\equiv 11g^m$ を 2 乗すると,

$$4\equiv 121g^{2m}=11\cdot 11g^{2m}=-99$$

$$103\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

$$p=103$$

3) $r_{j+m}=p-3,\quad r_{j+2m}=p-8$ とする.

$$p-3=r_{j+m}\equiv 11g^m$$

$$p-8=r_{j+2m}\equiv 11g^{2m}$$

$-3\equiv 11g^m$ を 2 乗すると,

$$9\equiv 121g^{2m}=11\cdot 11g^{2m}=-88$$

$$97\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

$$p=97$$

4) $r_{j+m}=p-4,\quad r_{j+2m}=p-7$ とする.

$$p-4=r_{j+m}\equiv 11g^m$$

$$p-7=r_{j+2m}\equiv 11g^{2m}$$

$-4 \equiv 11g^m$ を 2 乗すると,

$$16 \equiv 121g^{2m} = 11 \cdot 11g^{2m} = -77$$

$$93 \equiv 0 \pmod p$$

$93 = 3 \cdot 31pk$ とかけるので,$p = 31$
同様に, この場合は成り立たない.

5) $r_{j+m} = p - 5, \quad r_{j+2m} = p - 6$ とする.

$$p - 5 = r_{j+m} \equiv 11g^m$$

$$p - 6 = r_{j+2m} \equiv 11g^{2m}$$

$-5 \equiv 11g^m$ を 2 乗すると,

$$25 \equiv 121g^{2m} = 11 \cdot 11g^{2m} = -66$$

$$91 \equiv 0 \pmod p$$

$91 = 7 \cdot 13 = pk$ とかけるので,$p = 13$
同様に, この場合は成り立たない.
$a = 11$ で乗数がはじめて 2 になるのは,$\frac{11}{97}, \frac{11}{103}$ のとき

○ $m(b)=12$ となる b を求める.
$r_j=12$ とする.

$$12+r_{j+m}+r_{j+2m}=2p$$

1) $r_{j+m}=p-1,\quad r_{j+2m}=p-11$ とする.

$$p-1=r_{j+m}\equiv 12g^m$$

$$p-11=r_{j+2m}\equiv 12g^{2m}$$

$-1\equiv 12g^m$ を 2 乗すると,

$$1\equiv 144g^{2m}=12\cdot 12g^{2m}=-132$$

$$133\equiv 0 \qquad \pmod p$$

$133=7\cdot 19pk$ とかけるので,$p=19$
同様に, この場合は成り立たない.

2) $r_{j+m}=p-2,\quad r_{j+2m}=p-10$ とする.

$$p-2=r_{j+m}\equiv 12g^m$$

$$p-10=r_{j+2m}\equiv 12g^{2m}$$

$-2\equiv 12g^m$ を 2 乗すると,

$$4\equiv 144g^{2m}=12\cdot 12g^{2m}=-120$$

$$124\equiv 0 \qquad \pmod p$$

$124=2^2\cdot 31=pk$ とかけるので,$p=31$
同様に, この場合は成り立たない.

3) $r_{j+m}=p-3,\quad r_{j+2m}=p-9$ とする.

$$p-3=r_{j+m}\equiv 12g^m$$

$$p-9=r_{j+2m}\equiv 12g^{2m}$$

$-3\equiv 12g^m$ を 2 乗すると,

$$9\equiv 144g^{2m}=12\cdot 12g^{2m}=-108$$

$$117\equiv 0 \qquad \pmod p$$

$117=3^2\cdot 13=pk$ とかけるので,$p=13$
同様に, この場合は成り立たない.

4) $r_{j+m}=p-4,\quad r_{j+2m}=p-8$ とする.

$$p-4=r_{j+m}\equiv 12g^m$$

$$p-8=r_{j+2m}\equiv 12g^{2m}$$

$-4\equiv 12g^m$ を 2 乗すると,

$$16\equiv 144g^{2m}=12\cdot 12g^{2m}=-96$$

$$112\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

$112=2^4\cdot 7$ なのでこの場合は成り立たない.

5) $r_{j+m}=p-5,\quad r_{j+2m}=p-7$ とする.

$$p-5=r_{j+m}\equiv 12g^m$$

$$p-7=r_{j+2m}\equiv 12g^{2m}$$

$-5\equiv 12g^m$ を 2 乗すると,

$$25\equiv 144g^{2m}=12\cdot 12g^{2m}=-84$$

$$109\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

$$p=109$$

$a=12$ で乗数がはじめて 2 になるのは,$\dfrac{12}{109}$ のとき

○ $m(b)=13$ となる b を求める．

$r_j=13$ とする．

$$13+r_{j+m}+r_{j+2m}=2p$$

1) $r_{j+m}=p-1,\quad r_{j+2m}=p-12$ とする．

$$p-1=r_{j+m}\equiv 13g^m$$

$$p-12=r_{j+2m}\equiv 13g^{2m}$$

$-1\equiv 13g^m$ を 2 乗すると，

$$1\equiv 169g^{2m}=13\cdot 13g^{2m}=-156$$

$$157\equiv 0 \qquad \pmod p$$

$$p=157$$

2) $r_{j+m}=p-2,\quad r_{j+2m}=p-11$ とする．

$$p-2=r_{j+m}\equiv 13g^m$$

$$p-11=r_{j+2m}\equiv 13g^{2m}$$

$-2\equiv 13g^m$ を 2 乗すると，

$$4\equiv 169g^{2m}=13\cdot 13g^{2m}=-143$$

$$147\equiv 0 \qquad \pmod p$$

$147=3\cdot 7^2$ なのでこの場合は成り立たない．

3) $r_{j+m}=p-3,\quad r_{j+2m}=p-10$ とする．

$$p-3=r_{j+m}\equiv 13g^m$$

$$p-10=r_{j+2m}\equiv 13g^{2m}$$

$-3\equiv 13g^m$ を 2 乗すると，

$$9\equiv 169g^{2m}=13\cdot 13g^{2m}=-130$$

$$139\equiv 0 \qquad \pmod p$$

$p=139$ は 3 分割できないので成り立たない．

4) $r_{j+m}=p-4,\quad r_{j+2m}=p-9$ とする．

$$p-4=r_{j+m}\equiv 13g^m$$

$$p-9=r_{j+2m}\equiv 13g^{2m}$$

$-4\equiv 13g^m$ を 2 乗すると，

$$16\equiv 169g^{2m}=13\cdot 13g^{2m}=-117$$

$$133 \equiv 0 \pmod p$$

$133 = 7 \cdot 19pk$ とかけるので,$p = 19$
同様に, この場合は成り立たない.

5) $r_{j+m} = p - 5, \quad r_{j+2m} = p - 8$ とする.

$$p - 5 = r_{j+m} \equiv 13g^m$$

$$p - 8 = r_{j+2m} \equiv 13g^{2m}$$

$-5 \equiv 13g^m$ を 2 乗すると,

$$25 \equiv 169g^{2m} = 13 \cdot 13g^{2m} = -104$$

$$129 \equiv 0 \pmod p$$

$129 = 3 \cdot 43 = pk$ とかけるので,$p = 43$
同様に, この場合は成り立たない.

6) $r_{j+m} = p - 6, \quad r_{j+2m} = p - 7$ とする.

$$p - 6 = r_{j+m} \equiv 13g^m$$

$$p - 7 = r_{j+2m} \equiv 13g^{2m}$$

$-6 \equiv 13g^m$ を 2 乗すると,

$$36 \equiv 169g^{2m} = 13 \cdot 13g^{2m} = -91$$

$$127 \equiv 0 \pmod p$$

$$p = 127$$

$a = 13$ で乗数がはじめて 2 になるのは,$\frac{13}{127}, \frac{13}{157}$ のとき

○ $m(b)=14$ となる b を求める.
$r_j=14$ とする.

$$14+r_{j+m}+r_{j+2m}=2p$$

1) $r_{j+m}=p-1,\quad r_{j+2m}=p-13$ とする.

$$p-1=r_{j+m}\equiv 14g^m$$

$$p-13=r_{j+2m}\equiv 14g^{2m}$$

$-1\equiv 14g^m$ を 2 乗すると,

$$1\equiv 196g^{2m}=14\cdot 14g^{2m}=-182$$

$$183\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

$183=3\cdot 61=pk$ とかけるので,$p=61$
同様に, この場合は成り立たない.

2) $r_{j+m}=p-2,\quad r_{j+2m}=p-12$ とする.

$$p-2=r_{j+m}\equiv 14g^m$$

$$p-12=r_{j+2m}\equiv 14g^{2m}$$

$-2\equiv 14g^m$ を 2 乗すると,

$$4\equiv 196g^{2m}=14\cdot 14g^{2m}=-168$$

$$172\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

$172=2^2\cdot 43=pk$ とかけるので,$p=43$
同様に, この場合は成り立たない.

3) $r_{j+m}=p-3,\quad r_{j+2m}=p-11$ とする.

$$p-3=r_{j+m}\equiv 14g^m$$

$$p-11=r_{j+2m}\equiv 14g^{2m}$$

$-3\equiv 14g^m$ を 2 乗すると,

$$9\equiv 196g^{2m}=14\cdot 14g^{2m}=-154$$

$$163\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

$$p=163$$

4) $r_{j+m}=p-4,\quad r_{j+2m}=p-10$ とする.

$$p-4=r_{j+m}\equiv 14g^m$$

$$p-10=r_{j+2m}\equiv 14g^{2m}$$

$-4 \equiv 14g^m$ を 2 乗すると,

$$16 \equiv 196g^{2m} = 14 \cdot 14g^{2m} = -140$$

$$156 \equiv 0 \qquad \pmod p$$

$156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$ なので成り立たない.

5) $r_{j+m} = p - 5, \quad r_{j+2m} = p - 9$ とする.

$$p - 5 = r_{j+m} \equiv 14g^m$$

$$p - 9 = r_{j+2m} \equiv 14g^{2m}$$

$-5 \equiv 14g^m$ を 2 乗すると,

$$25 \equiv 196g^{2m} = 14 \cdot 14g^{2m} = -126$$

$$151 \equiv 0 \qquad \pmod p$$

$$p = 151$$

6) $r_{j+m} = p - 6, \quad r_{j+2m} = p - 8$ とする.

$$p - 6 = r_{j+m} \equiv 14g^m$$

$$p - 8 = r_{j+2m} \equiv 14g^{2m}$$

$-6 \equiv 14g^m$ を 2 乗すると,

$$36 \equiv 169g^{2m} = 14 \cdot 14g^{2m} = -112$$

$$148 \equiv 0 \qquad \pmod p$$

$148 = 2^2 \cdot 37 = pk$ とかけるので,$p = 37$

同様に, この場合は成り立たない.

$a = 14$ で乗数がはじめて 2 になるのは,$\dfrac{14}{151}, \dfrac{14}{163}$ のとき

○ $m(b)=15$ となる b を求める．

$r_j=15$ とする．

$$15+r_{j+m}+r_{j+2m}=2p$$

1) $r_{j+m}=p-1,\quad r_{j+2m}=p-14$ とする．

$$p-1=r_{j+m}\equiv 15g^m$$

$$p-14=r_{j+2m}\equiv 15g^{2m}$$

$-1\equiv 15g^m$ を 2 乗すると，

$$1\equiv 225g^{2m}=15\cdot 15g^{2m}=-210$$

$$211\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

$$p=211$$

2) $r_{j+m}=p-2,\quad r_{j+2m}=p-13$ とする．

$$p-2=r_{j+m}\equiv 15g^m$$

$$p-13=r_{j+2m}\equiv 15g^{2m}$$

$-2\equiv 15g^m$ を 2 乗すると，

$$4\equiv 225g^{2m}=15\cdot 15g^{2m}=-195$$

$$199\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

$$p=199$$

3) $r_{j+m}=p-3,\quad r_{j+2m}=p-12$ とする．

$$p-3=r_{j+m}\equiv 15g^m$$

$$p-12=r_{j+2m}\equiv 15g^{2m}$$

$-3\equiv 15g^m$ を 2 乗すると，

$$9\equiv 225g^{2m}=15\cdot 15g^{2m}=-180$$

$$189\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

$189=3^3\cdot 7$ なので成り立たない．

4) $r_{j+m}=p-4,\quad r_{j+2m}=p-11$ とする．

$$p-4=r_{j+m}\equiv 15g^m$$

$$p-11=r_{j+2m}\equiv 15g^{2m}$$

$-4\equiv 15g^m$ を 2 乗すると，

$$16\equiv 225g^{2m}=15\cdot 15g^{2m}=-165$$

$$181 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

$$p = 181$$

5) $r_{j+m} = p-5, \quad r_{j+2m} = p-10$ とする.

$$p-5 = r_{j+m} \equiv 15g^m$$

$$p-10 = r_{j+2m} \equiv 15g^{2m}$$

$-5 \equiv 15g^m$ を 2 乗すると,

$$25 \equiv 225g^{2m} = 15 \cdot 15g^{2m} = -150$$

$$175 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

$175 = 5^2 \cdot 7$ なので成り立たない.

6) $r_{j+m} = p-6, \quad r_{j+2m} = p-9$ とする.

$$p-6 = r_{j+m} \equiv 15g^m$$

$$p-9 = r_{j+2m} \equiv 15g^{2m}$$

$-6 \equiv 15g^m$ を 2 乗すると,

$$36 \equiv 225g^{2m} = 15 \cdot 15g^{2m} = -135$$

$$171 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

$171 = 3 \cdot 57 = pk$ とかけるので,$p = 57$
同様に, この場合は成り立たない.

7) $r_{j+m} = p-7, \quad r_{j+2m} = p-8$ とする.

$$p-7 = r_{j+m} \equiv 15g^m$$

$$p-8 = r_{j+2m} \equiv 15g^{2m}$$

$-7 \equiv 15g^m$ を 2 乗すると,

$$49 \equiv 225g^{2m} = 15 \cdot 15g^{2m} = -120$$

$$169 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

$169 = 13^2$ なので成り立たない.
$a = 15$ で乗数がはじめて 2 になるのは,$\frac{15}{181}, \frac{15}{199}, \frac{15}{211}$ のとき

さらに, 上記の計算で求めた ${r_{j+m}}^2 - ar_{j+2m}$ に, その分母 p が因数として含まれているとき, 乗数が 2 になることがわかった.

○ $a = 8$ で乗数が 2 になるときの分母を考える.

$r_j = 8$ とする.

$$8 + r_{j+m} + r_{j+2m} = 2p$$

1) $r_{j+m} = p - 1, \quad r_{j+2m} = p - 7$ とする.

$$p - 1 = r_{j+m} \equiv 8g^m$$

$$p - 7 = r_{j+2m} \equiv 8g^{2m}$$

$-1 \equiv 8g^m$ を 2 乗すると,

$$1 \equiv 64g^{2m} = 8 \cdot 8g^{2m} = -56$$

$$57 \equiv 0 \pmod p$$

$57 = 3 \cdot 19$ とかける.

$\dfrac{8}{19}$ のとき乗数が 2 になる.

2) $r_{j+m} = p - 2, \quad r_{j+2m} = p - 6$ とする.

$$p - 2 = r_{j+m} \equiv 8g^m$$

$$p - 6 = r_{j+2m} \equiv 8g^{2m}$$

$-2 \equiv 8g^m$ を 2 乗すると,

$$4 \equiv 64g^{2m} = 8 \cdot 8g^{2m} = -48$$

$$52 \equiv 0 \pmod p$$

$52 = 2^2 \cdot 13$ とかける.

$\dfrac{8}{13}$ のとき乗数が 2 になる.

3) $r_{j+m} = p - 3, \quad r_{j+2m} = p - 5$ とする.

$$p - 3 = r_{j+m} \equiv 8g^m$$

$$p - 5 = r_{j+2m} \equiv 8g^{2m}$$

$-3 = 8g^m$ を 2 乗すると,

$$9 \equiv 64g^{2m} = 8 \cdot 8g^{2m} = -40$$

$$49 \equiv 0 \pmod p$$

$49 = 7^2$ なので成り立たない.

○ $a=10$ で乗数が 2 になるときの分母を考える．
$r_j=10$ とする．

$$10+r_{j+m}+r_{j+2m}=2p$$

1) $r_{j+m}=p-1,\quad r_{j+2m}=p-9$ とする．

$$p-1=r_{j+m}\equiv 10g^m$$

$$p-9=r_{j+2m}\equiv 10g^{2m}$$

$-1\equiv 10g^m$ を 2 乗すると，

$$1\equiv 100g^{2m}=10\cdot 10g^{2m}=-90$$

$$91\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

$91=7\cdot 13$ とかける．
$\dfrac{10}{13}$ のとき乗数が 2 になる．

2) $r_{j+m}=p-2,\quad r_{j+2m}=p-8$ とする．

$$p-2=r_{j+m}\equiv 10g^m$$

$$p-8=r_{j+2m}\equiv 10g^{2m}$$

$-2\equiv 10g^m$ を 2 乗すると，

$$4\equiv 100g^{2m}=10\cdot 10g^{2m}=-80$$

$$84\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

$84=2^2\cdot 3\cdot 7$ なので成り立たない．

3) $r_{j+m}=p-3,\quad r_{j+2m}=p-7$ とする．

$$p-3=r_{j+m}\equiv 10g^m$$

$$p-7=r_{j+2m}\equiv 10g^{2m}$$

$-3\equiv 10g^m$ を 2 乗すると，

$$9\equiv 100g^{2m}=10\cdot 10g^{2m}=-70$$

$$79\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

79 は 3 分割できない素数なので不成立．

4) $r_{j+m}=p-4,\quad r_{j+2m}=p-6$ とする．

$$p-4=r_{j+m}\equiv 10g^m$$

$$p-6=r_{j+2m}\equiv 10g^{2m}$$

$-4 \equiv 10g^m$ を 2 乗すると,

$$16 \equiv 100g^{2m} = 10 \cdot 10g^{2m} = -60$$

$$76 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ p)$$

$76 = 2^2 \cdot 19$ とかける.
$\dfrac{10}{19}$ のとき乗数が 2 になる.

5　今後の課題

今回,$\frac{a}{b}$, $1 \leq a < b$ の 3 分割和の $m(b) = a$ について研究した. はじめて以外のときについても少し言及したが,

$$1 \text{ 回目} \qquad {r_{j+m}}^2 - ar_{j+2m} = 1 \cdot p$$

$$2 \text{ 回目} \qquad {r_{j+m}}^2 - ar_{j+2m} = 3 \cdot p$$

$$3 \text{ 回目} \qquad {r_{j+m}}^2 - ar_{j+2m} = 2^2 \cdot p$$

$$\vdots$$

と $b =$ までは乗数が 2 になるときの ${r_{j+m}}^2 - ar_{j+2m}$ に規則があるように思えた. しかし, それ以降は, この規則に合わなくなってしまった.
2 回目,3 回目, それ以降に乗数が 2 になるときの規則性を見つけることが, 今後の課題である.

6　参考文献

参考文献

[1] E.Midy, *De Quelques Propriétés des Nombres et des Fractions Décimales Périodiques*, Nantes, 1836.

[2] M.Jenkins, Question #1998, *Mathematical Question and Solutions*, 7(1867)31-32. bibitemdicson L.E.Dickson, *History of the Theory of Numbers*, vol.1, chelsea, 1952.

[3] W.J.LeVeque, *Topics in Number Theory*, vol.1, Addison - Wesley, 1956.

[4] W.G.Leavitt, A Theorem on Repeating Decimals, *Amer.Math.Monthly*, 74(1967)669-673.

[5] Ross Honsberger, *Ingenuity in Mathematics*, Random House/Singer, New Mathmatical Library, 1970.

[6] M.Shrader-frechette, Complementary Rational Numbers, Math.Mag., 51(1978)90-98.

[7] H.Rademacher and O.Toeplitz, *The Enjoyment of Mathematics*, Dover Publications, 1990.

[8] 大野一樹 小島英人 高梨拓郎, 循環節の分割和の研究, 2003.

[9] B.D.Ginsberg, *Midy's(Nearly) Seacret Theorem-An Extension After 165 Years*, *College Mathematics Journal*, 35(2004)26-30.

[10] Ankit Gupta and B.Sury, *Decimal expansion of 1/p and subgroup sums*, Integers: Electronic Journal of Combinatorial Number Theory 5(2005), #A19.

[11] Joseph Lewittes, Midy's Theorem for Periodic Decimals: Electronic Journal of Combinatorial Number Theory 7(2007), #A02.

[12] Harold W.Martin, Generalizations of Midy's Theorem on Repeating Decimals: Electronic Journal of Combinatorial Number Theory 7(2007), #A03.

[13] 藤原由樹子, 3 進での循環小数の 2 分割和の研究, 2008.

[14] 廣瀬朋貴, $4p$ と $9p$ を分母とする分数の小数展開について, 2008.

[15] 中山夕佳, $\frac{1}{9p}$ の循環節の 2 分割和について, 2009.

[16] 栗木真奈美, $\frac{1}{9p}$ の循環節の 3 分割和について, 2009.

[17] 千徳道子, $\frac{1}{5p}$ を 2 進展開したときの循環節の 2 分割和, 2009.

[18] 武居佳奈子, $\frac{1}{5p}$ を 2 進展開したときの循環節の 3 分割和, 2009.

[19] 山本詩織, 分数の循環節の 3 分割和と 4 分割和の研究, 2010.

7 感想

はじめは,Prolog の使い方もわからずどうなることかと思いましたが, このように卒業論文としてまとめることができ, 安堵しています.
Prolog 使いたての時は, 一度で正解にたどり着こうと身動きが取れなくなってしまうことがよくありました. 何度も間違っては直してを繰り返すことで, 正しいプログラムをつくっていく過程は新鮮で, その苦労を乗り越えた時には大きな達成感がありました.
Prolog で出したデータから, 規則を探し出す作業は, 様々な発見があり, 面白い作業でした. 数字について, もっと学んでみたいと感じました.3 分割和の親和性について, 何か規則があるはずだと, データとにらめっこしていていましたが, 結局見つけられなかったのが心残りです.
これで, 数学科のゼミは終了となりますが, これからも, 自主的に学んでいけたらと思っています. 最後になりましたが, 根気よく指導してくださり, 数学の面白さを教えてくださり, おいしいカレー屋さんに連れて行ってくださった飯高先生, ありがとうございました.