# 素数分母の分数の小数展開　$\boldsymbol{2}d$,3,5分割和の研究

学習院大学理学部数学科
村田祐希

$\frac{1}{7}$を小数展開

$$\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$$

循環節は$(142857)$

$$[1,4,2]+[8,5,7]=[9,9,9] \qquad \longrightarrow 2\text{分割和}$$

$$[1,4]+[2,8]+[5,7]=[9,9] \qquad \longrightarrow 3\text{分割和}$$

循環節を$N$分割 $\qquad \longrightarrow N$分割和

$\dfrac{1}{17}$の4分割和

$$\frac{1}{17} = 0.\dot{0}58823529411764\dot{7}$$

$$[0,5,8,8] + [2,3,5,2] + [9,4,1,1] + [7,6,4,7] = [1,9,9,9,8]$$

$\boxed{\text{乗数}}$

$N$分割和は,$10^n - 1$の倍数になる.

この倍数を乗数$(k)$という.

例：$99999 = (10^5 - 1) \times 1 \longrightarrow$乗数 $k = 1$

$199998 = (10^5 - 1) \times 2 \longrightarrow$乗数 $k = 2$

$\frac{1}{19}$ の6分割和

$$\frac{1}{19} = 0.\dot{0}5263157894736842\dot{1}$$

$$[0,5,2]+[6,3,1]+[5,7,8]+[9,4,7]+[3,6,8]+[4,2,1]$$
$$=[2,9,9,7]$$

乗数　$k=3$

結果

**命題 1.** *1.* $2$分割和は$10^n-1$になる.すなわち,$k=1$

*2.* $4$分割和は$(10^n-1)\times 2$になる.すなわち,$k=2$

*3.* $6$分割和は$(10^n-1)\times 3$になる.すなわち,$k=3$

一般に,$2d$分割和は$(10^n-1)\times d$になる.すなわち,$k=d$
$(d=1,2,3,\cdots)$

Table 1. $b = 7$における3分割和

| $a$ | 10進展開での循環節 | 10進展開での3分割和 | 乗数 |
|---|---|---|---|
| 1 | [1, 4, 2, 8, 5, 7] | [9, 9] | 1 |
| 2 | [2, 8, 5, 7, 1, 4] | [9, 9] | 1 |
| 3 | [4, 2, 8, 5, 7, 1] | [1, 9, 8] | 2 |
| 4 | [5, 7, 1, 4, 2, 8] | [9, 9] | 1 |
| 5 | [7, 1, 4, 2, 8, 5] | [1, 9, 8] | 2 |
| 6 | [8, 5, 7, 1, 4, 2] | [1, 9, 8] | 2 |

**定理 1.** *3分割和の乗数は$k = 1, 2$になる.*

また, $\quad \dfrac{a}{b}$の乗数$+\dfrac{b-a}{b}$の乗数$=3$ *(相補性)*

Table 2. $b=31$ の5分割和

| $a$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | $\cdots$ | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 乗数 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 3 | 1 | 2 | 2 | $\cdots$ | 3 | 3 | 4 | 2 | 3 | 3 | 4 | 3 | 4 | 4 |

**定理 2.** 5分割和の乗数は $k=1,2,3,4$ になる.

また, $\dfrac{a}{b}$ の乗数 $+\dfrac{b-a}{b}$ の乗数 $=5$ （相補性）

一般に, $2d-1$ 分割和の乗数は $k=1,2,\cdots,2(d-1)$ になる.
$(d=1,2,3,\cdots)$

**命題 2.** $g^u \equiv 1 \pmod b$ となる $u$ が存在する.

（証明）$b$ は素数なので $p$ に置き換える.
$\dfrac{a}{p}$ を $g$ 進展開する($p$ は素数,$1 \leq a < p$,$g$ は $p$ で割れない).
$ga$ を $p$ で割って商を $q$,余りを $r_1$ とすると,

$$ga = q_1 p + r_1$$

$$gr_1 = q_2 p + r_2$$

$$gr_2 = q_3 p + r_3$$

$$\vdots$$

これらの式を$p$を法として見直す.

$$ga \equiv r_1 \pmod p$$

$$gr_1 \equiv r_2 \pmod p$$

$$gr_2 \equiv r_3 \pmod p$$

$$\vdots$$

上記より,

$$g^2 a \equiv r_2 \pmod p$$

これから,

$$g^j a \equiv r_j \pmod p$$

$i < j$があって$r_i = r_j$

$$g^i a \equiv r_i = r_j = g^j a \pmod p$$

$$g^j a - g^i a \equiv (g^j - g^i)a \equiv 0 \pmod p$$

$a$の逆元をかけると,

$$g^j - g^i \equiv 0 \pmod p$$

$g$の逆元$v$がある.$v^i$をかけると,

$$g^{j-i} - 1 \equiv 0 \pmod p$$

このような$j - i$の中で最小値を$u$とおく.
$g^u \equiv 1$となる$u > 0$が存在する.

**命題 3.** $b$が素数$p$とする.かつ$u$が3の倍数,すなわち$u=3m$のとき,乗数$k_j$は1または2になる.

(証明)

$$g^{3m}-1 \equiv 0 \pmod p$$

$$g^{3m}-1 \equiv (g^m-1)(g^{2m}+g^m+1) \equiv 0 \pmod p$$

$$1+g^m+g^{2m} \equiv 0 \pmod p$$

$r_{j+m} \equiv r_j g^m \pmod p$より

$$r_j+r_{j+m}+r_{j+2m} \equiv r_j(1+g^m+g^{2m}) \equiv 0 \pmod p$$

$$r_j+r_{j+m}+r_{j+2m} = k_j p$$

ここで$r_j<p,\quad r_{j+m}<p,\quad r_{j+2m}<p$　なので$k_jp<3p$
よって$k_j=1$または2

乗数 $k=2$ になるのは？

Table 3. $b=7$ における3分割和

| $a$ | 10進展開での循環節 | 10進展開での3分割和 | 乗数 |
|---|---|---|---|
| 1 | [1, 4, 2, 8, 5, 7] | [9, 9] | 1 |
| 2 | [2, 8, 5, 7, 1, 4] | [9, 9] | 1 |
| 3 | [4, 2, 8, 5, 7, 1] | [1, 9, 8] | 2 |
| 4 | [5, 7, 1, 4, 2, 8] | [9, 9] | 1 |
| 5 | [7, 1, 4, 2, 8, 5] | [1, 9, 8] | 2 |
| 6 | [8, 5, 7, 1, 4, 2] | [1, 9, 8] | 2 |

○ $a=3$ではじめて乗数が2になるときの分母を考える.

$k_j=2,\quad r_j=3$とする.

$$3+r_{j+m}+r_{j+2m}=2p$$

$r_{j+m}=p-1,\quad r_{j+2m}=p-2$とする.

$$p-1=r_{j+m}\equiv 3g^m$$

$$p-2=r_{j+2m}\equiv 3g^{2m}$$

$-1\equiv 3g^m$を2乗すると,

$$1\equiv 9g^{2m}=3\cdot 3g^{2m}=3\cdot(-2)=-6$$

$$7\equiv 0 \pmod p$$

$7=pk$となる$k$がある.

ここで7は素数なので,$p=7$

よって$a=3$ではじめて乗数が2になるのは,

$\dfrac{3}{7}$のときである.

Table 4. 3分割和

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 乗数が2になる最初の分子$a$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 | 9 | 9 | 11 | 11 |
| 分母$b$ | 7 | 13 | 19 | 31 | 37 | 43 | 61 | 67 | 97 | 103 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 乗数が2になる最初の分子$a$ | 12 | 13 | 14 | 13 | 14 | 15 | 16 | 15 |
| 分母$b$ | 109 | 127 | 151 | 157 | 163 | 181 | 193 | 199 |

○ $a=15$ではじめて乗数が2になるときの分母を考える.

$r_j=15$とする.

$$15+r_{j+m}+r_{j+2m}=2p$$

1) $r_{j+m}=p-1$,$r_{j+2m}=p-14$とする.

$$p-1=r_{j+m}\equiv 15g^m$$

$$p-14=r_{j+2m}\equiv 15g^{2m}$$

$-1\equiv 15g^m$を2乗すると,

$$1\equiv 225g^{2m}=15\cdot 15g^{2m}=-210$$

$$211\equiv 0 \pmod p$$

$$p=211$$

2) $r_{j+m} = p - 2, r_{j+2m} = p - 13$とする.

$$p - 2 = r_{j+m} \equiv 15g^m$$
$$p - 13 = r_{j+2m} \equiv 15g^{2m}$$

$-2 \equiv 15g^m$を2乗すると,

$$4 \equiv 225g^{2m} = 15 \cdot 15g^{2m} = -195$$
$$199 \equiv 0 \pmod{p}$$
$$p = 199$$

3) $r_{j+m}=p-3$,$r_{j+2m}=p-12$とする.

$$p-3=r_{j+m}\equiv 15g^m$$
$$p-12=r_{j+2m}\equiv 15g^{2m}$$

$-3\equiv 15g^m$を2乗すると,

$$9\equiv 225g^{2m}=15\cdot 15g^{2m}=-180$$
$$189\equiv 0 \pmod{p}$$

$189=3^3\cdot 7$なので成り立たない.

4) $r_{j+m} = p - 4, r_{j+2m} = p - 11$ とする.

$$p - 4 = r_{j+m} \equiv 15g^m$$
$$p - 11 = r_{j+2m} \equiv 15g^{2m}$$

$-4 \equiv 15g^m$ を2乗すると,

$$16 \equiv 225g^{2m} = 15 \cdot 15g^{2m} = -165$$
$$181 \equiv 0 \pmod{p}$$
$$p = 181$$

5) $r_{j+m}=p-5, r_{j+2m}=p-10$ とする.

$$p-5=r_{j+m}\equiv 15g^m$$

$$p-10=r_{j+2m}\equiv 15g^{2m}$$

$-5\equiv 15g^m$ を2乗すると,

$$25\equiv 225g^{2m}=15\cdot 15g^{2m}=-150$$

$$175\equiv 0 \pmod p$$

$175=5^2\cdot 7$ なので成り立たない.

6) $r_{j+m} = p-6$,$r_{j+2m} = p-9$とする.

$$p-6 = r_{j+m} \equiv 15g^m$$

$$p-9 = r_{j+2m} \equiv 15g^{2m}$$

$-6 \equiv 15g^m$を2乗すると,

$$36 \equiv 225g^{2m} = 15 \cdot 15g^{2m} = -135$$

$$171 \equiv 0 \pmod{p}$$

$171 = 3 \cdot 57 = pk$とかけるので,$p = 57$

同様に,この場合は成り立たない.

7) $r_{j+m} = p - 7, r_{j+2m} = p - 8$とする.

$$p - 7 = r_{j+m} \equiv 15g^m$$

$$p - 8 = r_{j+2m} \equiv 15g^{2m}$$

$-7 \equiv 15g^m$を2乗すると,

$$49 \equiv 225g^{2m} = 15 \cdot 15g^{2m} = -120$$

$$169 \equiv 0 \pmod{p}$$

$169 = 13^2$なので成り立たない.

よって$a = 15$ではじめて乗数が2になるのは,

$$\frac{15}{181}, \frac{15}{199}, \frac{15}{211}$$のときである.

○$a=8$で乗数が2になるときの分母を考える.

$r_j=8$とする.

$$8+r_{j+m}+r_{j+2m}=2p$$

1) $r_{j+m}=p-1$,$r_{j+2m}=p-7$とする.

$$p-1=r_{j+m}\equiv 8g^m$$

$$p-7=r_{j+2m}\equiv 8g^{2m}$$

$-1\equiv 8g^m$を2乗すると,

$$1\equiv 64g^{2m}=8\cdot 8g^{2m}=-56$$

$$57\equiv 0 \pmod{p}$$

$57=3\cdot 19$とかける.

$\dfrac{8}{19}$のとき乗数が2になる.

2) $r_{j+m} = p - 2, r_{j+2m} = p - 6$とする.

$$p - 2 = r_{j+m} \equiv 8g^m$$
$$p - 6 = r_{j+2m} \equiv 8g^{2m}$$

$-2 \equiv 8g^m$を2乗すると,

$$4 \equiv 64g^{2m} = 8 \cdot 8g^{2m} = -48$$
$$52 \equiv 0 \pmod{p}$$

$52 = 2^2 \cdot 13$とかける.

$\frac{8}{13}$のとき乗数が2になる.

3) $r_{j+m} = p-3, r_{j+2m} = p-5$ とする.

$$p-3 = r_{j+m} \equiv 8g^m$$
$$p-5 = r_{j+2m} \equiv 8g^{2m}$$

$3 \equiv 8g^m$ を2乗すると,

$$9 \equiv 64g^{2m} = 8 \cdot 8g^{2m} = -40$$
$$49 \equiv 0 \pmod{p}$$

$49 = 7^2$ なので成り立たない.