倍差回文についての研究

佐藤広顕
学習院大学理学部数学科

平成 24 年 2 月 2 日

目 次

1 目的

任意の自然数 A に対し,1 の位から逆に並び替えた数を B とおく。$|2A-B|$ が回文[1]になれば終了とし, ならなければ $|2A-B|$ を改めて A とおき, 回文になるまで繰り返す。これを倍差回文化操作とする。

倍差回文化操作によって, 回文になるかどうか, 循環または発散するかどうかを調べることを目的にする。また、回文は倍差回文化操作をしても回文のままである。

以下 10 進数の場合の例を 2 つ挙げる。

●A=65 の場合

このとき,$2A=130, B=56$ となる。
順に倍差回文化操作でできた数を $D_1, D_2, \cdots$ と記す。
$D_1 = 130 - 56 = 74$
$D_2 = 148 - 47 = 101$
となり, 回文となった。

●A=290 の場合

このとき $2A=580, B=92$ となる。
$D_1 = 580 - 92 = 488$
$D_2 = 976 - 884 = 92$
$D_3 = 184 - 29 = 155$
$D_4 = 551 - 310 = 241$
$D_5 = 482 - 142 = 340$
$D_6 = 680 - 43 = 637$
$D_7 = 1274 - 736 = 538$
$D_8 = 1076 - 835 = 241$
ここで,$D_4 = D_8 = 241$ となり, 回文にならない。
この場合循環する。

この研究では一般に　進数の場合を調べる。

前から読んでも後ろから読んでも同じ言葉になるもの。例：しんぶんし。ここでは　　などの数字を指す。

2　方法

2.1　方法

prolog を使って倍差回文の計算をするプログラムを作った。

2.2　プログラム

繰り返し

```
for(I=<J,I):-I=<J.
for(I=<J,K):-I=<J,
    I1 is I+1,for(I1=<J,K).
```

リストの結合

```
append0(Z=[]+Z).
append0([A|Z]=[A|X]+Y):-append0(Z=X+Y).
```

10 進数を G 進数に変換 (リストで表示)

```
dec10(N,[N],G):-N<G,!.
dec10(N,L,G):-
    N1 is N//G,
    R is N mod G,
    dec10(N1,L1,G),
    append0(L=L1+[R]).
```

10 進数 100 を 2 進数に変換する例

```
1 ?- dec10(100,L,2).
L = [1, 1, 0, 0, 1, 0, 0] .
```

G 進数を 10 進数に変換

進数　を　進数に変換する例

G 進数のリストの足し算

```
listsum(C=A+B,G):-
    bec10(Na,A,G),
    bec10(Nb,B,G),
    Nc is Na+Nb,
    dec10(Nc,C,G).
```

10 進数 136+524 をリストで計算する例

```
3 ?- listsum(C=[1,3,6]+[5,2,4],10).
C = [6, 6, 0] .
```

G 進数のリストの引き算 ($A \geq B$)

```
listdif(C=A-B,G):-
    bec10(Na,A,G),
    bec10(Nb,B,G),
    Nc is Na-Nb,
    dec10(Nc,C,G).
```

2 進数 1001011-1011 をリストで計算する例

```
4 ?- listdif(C=[1,0,0,1,0,1,1]-[1,0,1,1],2).
C = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0] .
```

*で使用するプログラム

```
:-dynamic sb/1.
go:-abolish(sb/1),asserta(sb([])).
```

G 進数 A から B まで, 倍差回文の計算過程を 10 進数で表示する*

```
baisaka(A=<B,G):-for(A=<B,C),write(a=C),put(9),baisaka0(1,C,G),nl,fail,!.
baisaka0(N,AA,G):-dec10(AA,A,G),baisaka1(N,A,G).
baisaka1(N,A,G):-reverse(A,B),
            ((A == B) -> (N = 0);
            (bec10(Na,A,G) , bec10(Nb,B,G), Nc is Na*2 , dec10(Nc,C,G),
            ((Nc >= Nb)-> (listdif(D=C-B,G),bec10(H,D,G));
                          (listdif(D=B-C,G),bec10(H,D,G))))),
            (\+ sb(H)) -> (write(H),put(9),asserta(sb(H)),(baisaka0(N,H,G)));
                          (go,!).
```

倍差回文化操作 10 進数,10 から 14 までの結果を表示する。

```
5 ?- baisaka(10=<14,10).
a=10	19	53	71	125	271	370	667	568
a=11
a=12	3
a=13	5
a=14	13	5
```

このプログラムで 2 カ所ある（6，7 行目）「bec10(H,D,G)」を消し, その次の行にある（8 行目）H を D に変えれば G 進数のリストで表示出来る。

3　結果

3.1　わかったこと

10 進数の場合

1. 10 進数の場合, 発散するものが無く, 回文になるか循環するものしかないであろう事が分かった。
2. 10 進数で循環してしまう場合, 規則性があるものがあった。
3. 10 進数で循環してしまう場合, その数から新たな循環してしまう数を作れるものがあった。
4. 10 進数で回文になる場合, その数の親には規則性があるものがあった。
5. 10 進数で回文になる場合, その数から新たな回文になる数を作れることが分かった。

2 進数の場合

1. 2 進数の場合, 倍差回文化操作をすれば, 全ての数が回文になるであろう事が分かった。
2. 2 進数の場合,1 回, 倍差回文化操作をする前の数の桁数と, 操作後の数の桁数には規則性があることが分かった。

10 進数の場合

10 進数, 倍差回文化操作を 1 回した結果。(1 から 100 まで)

操作前	操作後	操作前	操作後	操作前	操作後	操作前	操作後
1		26	10	51	87	76	85
2		27	18	52	79	77	
3		28	26	53	71	78	69
4		29	34	54	63	79	61
5		30	57	55		80	152
6		31	49	56	47	81	144
7		32	41	57	39	82	136
8		33		58	31	83	128
9		34	25	59	23	83	128
10	19	35	17	60	114	84	120
11		36	9	61	106	85	112
12	3	37	1	62	98	86	104
13	5	38	7	63	90	87	96
14	13	39	15	64	82	88	
15	21	40	76	65	74	89	80
16	29	41	68	66		90	171
17	37	42	60	67	58	91	163
18	45	43	52	68	50	92	155
19	53	44		69	42	93	147
20	38	45	36	70	133	95	131
21	30	46	28	71	125	96	123
22		47	20	72	117	97	115
23	14	48	12	73	109	98	107
24	6	49	4	74	101	99	
25	2	50	95	75	93	100	199

3.2　10 進数で循環する場合

倍差回文化操作をしたが, 循環してしまい回文にならない例があった。また 5500 まで倍差回文化操作をしたが、発散してしまう例は発見できなかった。

循環する数の周期による分類

表 1: 周期は 2 であり,4 桁で循環する例

3278 → 2167 → 3278
4356 → 2178 → 4356

周期 3 で循環する例は発見できなかった。

表 2: 周期は 4 であり,3 桁で循環する例

211 → 310 → 607 → 508 → 211
221 → 320 → 617 → 518 → 221
231 → 330 → 627 → 528 → 231
241 → 340 → 637 → 538 → 241
251 → 350 → 647 → 548 → 251
261 → 360 → 657 → 558 → 261
271 → 370 → 667 → 568 → 271
281 → 380 → 677 → 578 → 281
291 → 390 → 687 → 588 → 291
312 → 411 → 708 → 609 → 312
322 → 421 → 718 → 619 → 322
332 → 431 → 728 → 629 → 332
342 → 441 → 738 → 639 → 342
352 → 451 → 748 → 649 → 352
362 → 461 → 758 → 659 → 362
→ → → →
→ → → →
→ → → →

表 3: 周期は 4 であり,4 桁で循環する例

1023 → 1155 → 3201 → 5379 → 1023
1034 → 2233 → 1144 → 2123 → 1034
1045 → 3311 → 5489 → 1133 → 1045
1067 → 5467 → 3289 → 3245 → 1067
1177 → 5357 → 3179 → 3355 → 1177
1287 → 5247 → 3069 → 3465 → 1287
2068 → 4466 → 2288 → 4246 → 2068
2211 → 3300 → 6567 → 5478 → 2211
2321 → 3410 → 6677 → 5588 → 2321
2431 → 3520 → 6787 → 5698 → 2431
3212 → 4301 → 7568 → 6479 → 3212
3322 → 4411 → 7678 → 6589 → 3322
3432 → 4521 → 7788 → 6699 → 3432

表 4: 周期は 5 であり, 循環する例

21 → 30 → 57 → 39 → 15 → 21
201 → 300 → 597 → 399 → 195 → 201
1515 → 2121 → 3030 → 5757 → 3939 → 1515
1531 → 1711 → 2251 → 2980 → 5068 → 1531
1608 → 4845 → 4206 → 2388 → 4056 → 1608
1931 → 2471 → 3200 → 6377 → 5018 → 1931
1970 → 3149 → 3115 → 1117 → 4877 → 1970
1995 → 2001 → 3000 → 5997 → 3999 → 1995
2532 → 2712 → 3252 → 3981 → 6069 → 2532
[illegible] → [illegible] → [illegible] → [illegible] → [illegible] → [illegible]
→ → → → →
→ → → → →
→ → → → →
→ → → → →
→ → → → →
→ → → → →
→ → → → →

表 5: 周期は 6 であり, 循環する例

$1463 \to 715 \to 913 \to 1507 \to 4037 \to 770 \to 1463$

循環する数の構成

また, 循環するものの中で規則性のあるものがあった。
$3999\cdots97$ など 9 が n 個続く場合 $39^{(n)}7$ と表記する。また,n は 0 以上の任意の整数。

表 6: 周期 4 の循環例

$21 \to 30 \to 57 \to 39 \to 15 \to 21$
$201 \to 300 \to 597 \to 399 \to 195 \to 201$
$\vdots$
$20^{(n)}1 \to 30^{(n)}0 \to 59^{(n)}7 \to 39^{(n)}9 \to 19^{(n)}5 \to 20^{(n)}1$

表 7: 周期 5 の循環例

$3200 \to 6377 \to 5018 \to 1931 \to 2471 \to 3200$
$32000 \to 63977 \to 50018 \to 19031 \to 24971 \to 32000$
$\vdots$
$320^{(n)}00 \to 639^{(n)}77 \to 500^{(n)}18 \to 190^{(n)}31 \to 249^{(n)}71 \to 320^{(n)}00$
$1608 \to 4845 \to 4206 \to 2388 \to 4056 \to 1608$
$16008 \to 48045 \to 42006 \to 23988 \to 40956 \to 16008$
$\vdots$
$160^{(n)}08 \to 480^{(n)}45 \to 420^{(n)}06 \to 239^{(n)}88 \to 409^{(n)}56 \to 160^{(n)}08$

2 桁の循環,4 桁の循環の場合, 数の間に 0 または 9 の数を入れると新たな循環する数が作れることがわかった。

●$2068 \to 4466 \to 2288 \to 4246 \to 2068$ の場合
$209^{(n)}68 \to 449^{(n)}66 \to 229^{(n)}88 \to 429^{(n)}46 \to 209^{(n)}68$

●$1515 \to 2121 \to 3030 \to 5757 \to 3939 \to 1515$ の場合
$150^{(n)}15 \to 210^{(n)}21 \to 30^{(n)}30 \to 570^{(n)}57 \to 390^{(n)}39 \to 150^{(n)}15$

また, 循環するものを並べることによって新たな循環する数を作る事が出来る。
例:$3278 \to 2167 \to 3278$ の場合
$32783278 \to 21672167 \to 32783278$
$32783278 \cdots 3278$ のように循環する数を並べた数もまた循環する。

$A : 329978, B32978$ とおくと,ABA のように並べたものも循環する。
$32997832978329978 \to 21996721967219967 \to 32997832978329978$ など

$A_{n_j} = 329^{(n_j)}78$ とすると
$A_{n_1}A_{n_2} \cdots A_{n_{k-1}}An_kA_{n_{k-1}} \cdots A_{n_2}A_{n_1}$ または,
$A_{n_1}A_{n_2} \cdots A_{n_{k-1}}An_kAn_kA_{n_{k-1}} \cdots A_{n_2}A_{n_1}$ と並べたものも循環する。

3.3 10 進数回文になる場合

1 桁の数の親の例

倍差回文化操作する前の数を, 操作した後の数の親とする。
$37 \to 1$ の場合 37 は 1 の親。
1 桁の数は回文である。その中で規則性のあるものがあった。

表 8:

操作後の数	その親
1	$37, 397, 3997, \cdots, 39^{(n)}7$
2	$25, 295, 2995, \cdots, 29^{(n)}5$
3	$12, 102, 1002, \cdots, 10^{(n)}2$
4	$49, 499, 4999, \cdots, 49^{(n)}9$
5	$13, 193, 1993, \cdots, 19^{(n)}3$
6	$24, 204, 2004, \cdots, 20^{(n)}4$
7	発見できなかった
8	発見できなかった
9	$36, 306, 3006, \cdots, 30^{(n)}6$

規則性以外の親の例もいくつか発見した。
●6 になる数
$489 \to 6$

●7 になる数
$38 \to 7$

●8 になる数
$4258 \to 8$

1 桁の親の親の例

1 の親	$19^{(n)}7 \to 39^{(n)}7 \to 1$
2 の親	$39^{(n)}4 \to 29^{(n)}5 \to 2$
3 の親	$40^{(n)}8 \to 12 \to 3$
3 の親	$49^{(n)}8 \to 10^{(n)}2 \to 3$
3 の親	$30^{(n)}1 \to 49^{(n)}9 \to 3$
5 の親	$10^{(n)}4 \to 19^{(n)}3 \to 5$
5 の親	$110^{(n)}2 \to 19^{(n)}3 \to 5$
9 の親	$40^{(n)}5 \to 30^{(n)}6 \to 9$
9 の親	$450^{(n)}9 \to 36 \to 9$

その他, 親の親の例もいくつか発見した。

●1 になる数

$1052 \to 397 \to 1$

●2 になる数

$173 \to 25 \to 2$

●3 になる数

$285 \to 12 \to 3$

$2625 \to 12 \to 3$

$4368 \to 102 \to 3$

●4 になる数

$346 \to 49 \to 4$

$3316 \to 499 \to 4$

$347 \to 49 \to 4$

$3317 \to 499 \to 4$

●5 になる数

$589 \to 193 \to 5$

$5629 \to 1993 \to 5$

$\to \quad \to$

になる数

$\to \quad \to$

$\to \quad \to$

$\to \quad \to$

$\to \quad \to$

$\to \quad \to$

$\to \quad \to$

$\to \quad \to$

2 桁以上の回文になる場合

2 桁の回文になる数で規則性のあるもの。

操作後の数	操作する前の数
11	$3256, 32956, 329956, \cdots, 329^{(n)}56$
22	$2200, 22000, 220000, \cdots, 220^{(n)}00$
33	$1122, 11022, 110022, \cdots, 110^{(n)}22$
44	$2134, 21934, 219934, \cdots, 219^{(n)}34$
55	発見できなかった
66	$2244, 22044, 220044, \cdots, 220^{(n)}44$
77	$1012, 10912, 109912, \cdots, 109^{(n)}12$
88	発見できなかった
99	$3366, 33066, 330066, \cdots, 330^{(n)}66$

2 桁の回文の親で規則性があるもの

11 の親	$439^{(n)}45 \to 329^{(n)}56 \to 11$
22 の親	$220^{(n)}00 \to 439^{(n)}78 \to 22$
33 の親	$219^{(n)}45 \to 110^{(n)}22 \to 33$
77 の親	$220^{(n)}55 \to 109^{(n)}12 \to 77$
99 の親	$440^{(n)}55 \to 330^{(n)}66 \to 99$

●404 から 484 になる回文の親とその親には特徴があり,1 位と 3 位の数は不変で,2 位の数は公差 ±1 の等差数列になった。

$190 \to 289 \to 404$

$180 \to 279 \to 414$

$170 \to 269 \to 424$

$160 \to 259 \to 434$

$150 \to 249 \to 444$

$140 \to 239 \to 454$

$\to \quad \to$

$\to \quad \to$

$\to \quad \to$

●倍差回文化操作をした際に全ての位の数が $3, 6, 9$ で出来ている回文になる場合の親。

12	$\rightarrow$	3
1122	$\rightarrow$	33
111222	$\rightarrow$	333
$\vdots$	$\rightarrow$	$\vdots$
$1^{(n)}2^{(n)}$	$\rightarrow$	$3^{(n)}$

24	$\rightarrow$	6
2244	$\rightarrow$	66
222444	$\rightarrow$	666
$\vdots$	$\rightarrow$	$\vdots$
$2^{(n)}4^{(n)}$	$\rightarrow$	$6^{(n)}$

36	$\rightarrow$	9
3366	$\rightarrow$	99
333666	$\rightarrow$	999
$\vdots$	$\rightarrow$	$\vdots$
$3^{(n)}6^{(n)}$	$\rightarrow$	$9^{(n)}$

●特定の回文数

表 8 を使えば特定の回文を作ることが出来る。

例 1

$37 \rightarrow 1$

$3737 \rightarrow 101$

$373737 \rightarrow 10101$

$37373737 \rightarrow 1010101$

など、37 を並べた数もまた回文になる。

$397 \rightarrow 1$

$397397 \rightarrow 1001$

$397397397 \rightarrow 1001001$

$397397397397 \rightarrow 1001001001001$

を並べたものも回文になる。

3.4　2 進数の場合

2 進数の場合 20000(10 進数) まで調べたがすべて回文になった。循環してしまう場合や, 発散してしまう場合は発見できなかった。

1 回操作した後の桁数

任意の 2 進数の桁数と倍差回文化操作したあとの桁数の関係。

操作前の桁数	操作後の桁数
1	1
2	2
3	3,4
4	4,5
5	4,5,6
6	5,6,7
7	5,6,7,8
8	6,7,8,9
9	6,7,8,9,10
10	7,8,9,10,11
11	7,8,9,10,11,12
12	8,9,10,11,12,13
13	8,9,10,11,12,13,14
14	9,10,11,12,13,14,15

2 進数の桁数の関係

n 桁の 2 進数を倍差回文化操作した後の桁の種類 (個数) の予想

個数 A_n

n : 偶数の場合 $A_n = \frac{n}{2}$
　奇数の場合 $\frac{n+1}{\ }$

最小の桁数

偶数の場合 –
奇数の場合 ——

最大の桁数

表 9: 2 進数の倍差回文化操作をした結果。(10 進数で,1 から 64 まで)

10 進数	2 進数	1 回目	2 回目	10 進数	2 進数	1 回目	2 回目	3 回目
1	1			33	100001			
2	10	11		34	100010	110011		
3	11			35	100011	10101		
4	100	111		36	100100	111111		
5	101			37	100101	100001		
6	110	1001		38	100110	110011		
7	111			39	100111	10101		
8	1000	1111		40	101000	100101	101101	
9	1001			41	101001	101101		
10	1010	1111		42	101010	111111		
11	1011	1001		43	101011	100001		
12	1100	10101		44	101100	100101	101101	
13	1101	1111		45	101101			
14	1110	10101		46	101110	111111		
15	1111			47	101111	100001		
16	10000	11111		48	110000	1011101		
17	10001			49	110001	111111		
18	10010	11011		50	110010	1010001	1011101	
19	10011	1101	1111	51	110011			
20	10100	10011	10101	52	110100	1011101		
21	10101			53	110101	111111		
22	10110	11111		54	110110	101001	1011101	
23	10111	10001		55	110111	110011		
24	11000	101101		56	111000	1101001	10000111	101101
25	11001	11111		57	111001	1001011	101101	

4　考察

4.1　10 進数

$\bullet A = 39^{(n)}7 \to 1$ の証明
　$|39^{(n)}7 \times 2 - 79^{(n)}3|$
$=|79^{(n)}4 - 79^{(n)}3|$
$=1$
$\bullet A = 29^{(n)}5 \to 2$ の証明
　$|29^{(n)}5 \times 2 - 59^{(n)}2|$
$=|59^{(n)}0 - 59^{(n)}2|$
$=2$
$\bullet A = 10^{(n)}7 \to 3$ の証明
　$|10^{(n)}2 \times 2 - 20^{(n)}1|$
$=|20^{(n)}4 - 20^{(n)}1|$
$=3$
$\bullet A = 49^{(n)}9 \to 4$ の証明
　$|49^{(n)}9 \times 2 - 99^{(n)}4|$
$=|99^{(n)}8 - 99^{(n)}4|$
$=4$
$\bullet A = 19^{(n)}3 \to 5$ の証明
　$(n = 0)$
　$|13 \times 2 - 31| = 5$
　$(n \geq 1)$
　$|19^{(n)}3 \times 2 - 39^{(n)}1|$
$=|19^{(n-1)}93 \times 2 - 39^{(n-1)}91|$
$=|39^{(n-1)}8639^{(n-1)}91|$
$=4$
$\bullet A = 20^{(n)}4 \to 6$ の証明
　$=|20^{(n)}4 \times 2 - 40^{(n-1)}2|$
$=|40^{(n)}840^{(n)}2|$
$=6$
$\bullet A = 30^{(n)}6 \to 9$ の証明

2桁の10進数で倍差回文化操作を1回した後の数

2桁の10進数について考察する。

2桁の10進数を $A=10a+b$ とすると, 倍差回文化操作を1回した後の数は,$19a-8b$ になる。$(a,b\in\mathbb{Z},1\leq a\leq 9,0\leq b\leq 9)$

●1桁の数になる場合。

$|19a-8b|\leq 9$

$\frac{1}{19}(8b-9)\leq a\leq\frac{1}{19}(8b+9)$

$b=0\quad,a$ 無し
$b=1\quad,a$ 無し
$b=2\quad,a=1$
$b=3\quad,a=1$
$b=4\quad,a=2$
$b=5\quad,a=2$
$b=6\quad,a=3$
$b=7\quad,a=3$
$b=8\quad,a=3$
$b=9\quad,a=4$

●2桁の回文数になる場合。

$19a-8b=11n,(n\in\mathbb{Z},1\leq n\leq 9)$

$b=\frac{19a-11n}{8}$

この場合 $a=n$ のときのみ回文になる。

$b=\frac{19a-11a}{8}=a$

$b=a$

●3桁の数になる場合。

倍差回文の場合, 操作後の桁数は操作前の桁数より上がる場合がある。

$100\leq 19a-8b$

$b\leq\frac{19a-100}{8}$

$b=0\quad,a=6,7,8,9$

無し

3 桁の 10 進数で倍差回文化操作を 1 回した後の数

3 桁の 10 進数について考察する。

3 桁の 10 進数を $A=100a+10b+c$ とすると, 倍差回文化操作を 1 回した後の数は,$199a+10b-98c$ になる。

$(a,b,c\in\mathbb{Z},1\leq a\leq 9,0\leq b\leq 9,0\leq c\leq 9)$

●1 桁の数になる場合。

$|199a+10b-98c|\leq 9$

$\frac{1}{199}(98c-10b-9)\leq a\leq\frac{1}{199}(98c-10b+9)$

$c=0\quad,b,a$ 無し

$c=1\quad,b,a$ 無し

$c=2\quad,b=0,c=1$

$c=3\quad,b=9\quad,a=1$

$c=4\quad,b=0\quad,a=2$

$c=5\quad,b=9\quad,a=2$

$c=6\quad,b=0\quad,a=3$

$c=7\quad,b=8\quad,a=3$

$c=7\quad,b=9\quad,a=3$

$c=8\quad,b,a$ 無し

$c=9\quad,b=8\quad,a=4$

$c=9\quad,b=9\quad,a=4$

5　今後の課題

1. 10 進数で発散してしまう数はあるか。
2. 10 進数で循環してしまう数にはどのような特徴があるか。
3. 2 進数で循環してしまう数はあるか。
4. 10 進数以外の数の特徴。

6　感想

この 1 年間, 飯高研究室で勉強することで, 改めて数学とは奥が深いということを感じました。わかっていないことがとても多くとても驚きました。また, 研究では,prolog 使ってプログラミングをするのは初めてだったので, とても苦戦しました。C 言語と比べて考え方が違ったのではじめは大変でした。しかし, いろいろ練習するにつれて考え方が分かっていき, 自分で作ったプログラムがちゃんと動くと, とても充実感を感じました。そのほか,TEX を使ってみたいと感じていたのでその勉強ができたという点ではすごく良い経験になりました。

勉強のほかにもみんなで様々なイベントを行ったり充実した 1 年間になりました。勉強した内容を活かして社会に出ても活かしていきたいと感じています。

参考文献

[1] パズル数学入門 楽しみながら学ぶために 藤村幸三郎 田村三郎 著 講談社 BLUE BACKS 1977 年

[2] パソコンで開く数の不思議世界 飯高茂 著 岩波書店 岩波ジュニア新書 2004 年

[3] 差回文について 学習院大学理学部数学科飯高研究室 神戸勇輝著 2011 年