倍差回文についての研究

学習院大学理学部数学科
佐藤 広顕

平成24年2月3日

目的

自然数Aに対し,1の位から逆に並び替えた数をBとおく。

倍差回文化操作

$|2A-B|$が回文になれば終了。
ならなければ$|2A-B|$を改めてAとおく。
回文になるまで繰り返す。

倍差回文化操作によって,回文になるかどうか,
循環または発散するかどうかを調べる。

回文は倍差回文化操作をしても回文のまま。

●10進数A=65の場合の例

$2A=130, B=56$となる。

順に倍差回文化操作でできた数を$D_1, D_2, \cdots$ とする。

$D_1=130-56=74$

$D_2=148-47=101$

となり,回文となった。

わかったこと (10 進数).

(1) 5500 まで調べたが発散するものが無く,回文になるか循環するものしかなかった。
(2) 循環してしまう場合,規則性があるものがあった。
(3) 循環してしまう場合,その数から新たな循環してしまう数を作れるものがあった。
(4) 回文になる場合,その数の親には規則性があるものがあった。
(5) 回文になる場合,その数から新たな回文になる数を作れることが分かった。

循環してしまう例

●周期が2の循環

3278→2167→3278など

●周期3で循環してしまう例は発見できなかった。

●周期が4の循環

211→310→607→508→211など

●周期が5の循環

21→30→57→39→15→21など

●周期が6の循環

1463→715→913→1507→4037→770→1463など

循環するものの中で規則的なもの。
$3999\cdots97$ など9が n 個続く場合 $39^{(n)}7$ と表記する。
また,n は0以上の任意の整数。

$21\rightarrow30\rightarrow57\rightarrow39\rightarrow15\rightarrow21$
$201\rightarrow300\rightarrow597\rightarrow399\rightarrow195\rightarrow201$
$\vdots$
$20^{(n)}1\rightarrow30^{(n)}0\rightarrow59^{(n)}7\rightarrow39^{(n)}9\rightarrow19^{(n)}5\rightarrow20^{(n)}1$

2桁の数の循環,4桁の数の循環の場合

数の間に0または9の数を入れると,
新たな循環する数が作ることができる。

●2068→4466→2288→4246→2068の場合

$209^{(n)}68 \to 449^{(n)}66 \to 229^{(n)}88 \to 429^{(n)}46 \to 209^{(n)}68$

●1515→2121→3030→5757→3939→1515の場合

$150^{(n)}15 \to 210^{(n)}21 \to 30^{(n)}30 \to 570^{(n)}57 \to 390^{(n)}39 \to 150^{(n)}15$

循環するものを並べて,新たな循環する数を作る。

例:$3278 \to 2167 \to 3278$の場合

$32783278 \to 21672167 \to 32783278$

$(3278)^{(n)} \to (2167)^{(n)} \to (3278)^{(n)}$

回文になる例

倍差回文の親

ある数Aを倍差回文化操作してできた数をBとおく。このときAをBの親とする。37→1の場合37は1の親。

数	親
1	$37, 397, 3997, \cdots, 39^{(n)}7$
2	$25, 295, 2995, \cdots, 29^{(n)}5$
3	$12, 102, 1002, \cdots, 10^{(n)}2$
4	$49, 499, 4999, \cdots, 49^{(n)}9$
5	$13, 193, 1993, \cdots, 19^{(n)}3$
6	$24, 204, 2004, \cdots, 20^{(n)}4$
7,8	発見できなかった
9	$36, 306, 3006, \cdots, 30^{(n)}6$

●2 桁の回文になる数の親の規則性。

数	親
11	$3256, 32956, 329956, \cdots, 329^{(n)}56$
22	$2200, 22000, 220000, \cdots, 220^{(n)}00$
33	$1122, 11022, 110022, \cdots, 110^{(n)}22$
44	$2134, 21934, 219934, \cdots, 219^{(n)}34$
55	発見できなかった
66	$2244, 22044, 220044, \cdots, 220^{(n)}44$
77	$1012, 10912, 109912, \cdots, 109^{(n)}12$
88	発見できなかった
99	$3366, 33066, 330066, \cdots, 330^{(n)}66$

●回文 $3^{(n)}, 6^{(n)}, 9^{(n)}$ の親。

12	$\longrightarrow$	3	24	$\longrightarrow$	6	36	$\longrightarrow$	9
1122	$\longrightarrow$	33	2244	$\longrightarrow$	66	3366	$\longrightarrow$	99
111222	$\longrightarrow$	333	222444	$\longrightarrow$	666	333666	$\longrightarrow$	999
$\vdots$	$\longrightarrow$	$\vdots$	$\vdots$	$\longrightarrow$	$\vdots$	$\vdots$	$\longrightarrow$	$\vdots$
$1^{(n)}2^{(n)}$	$\longrightarrow$	$3^{(n)}$	$2^{(n)}4^{(n)}$	$\longrightarrow$	$6^{(n)}$	$3^{(n)}6^{(n)}$	$\longrightarrow$	$9^{(n)}$

●特定の回文数

10101や1001001のような特定の回文の親を作る。

例

37→1

3737→101

373737→10101

37373737→1010101

37を並べた数も倍差回文化操作をすればまた回文になる。

397→1

397397→1001

397397397→1001001

397397397397→1001001001

$39^{(n)}7$を並べたものも倍差回文化操作をすれば回文になる。

$\bullet A = 39^{(n)}7 \to 1$の証明

$$|39^{(n)}7 \times 2 - 79^{(n)}3|$$
$$= |79^{(n)}4 - 79^{(n)}3|$$
$$= 1$$

$$\begin{array}{rr} & 3999\cdots97 \\ \times & 2 \\ \hline & 7999\cdots94 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr} & 7999\cdots94 \\ - & 7999\cdots93 \\ \hline & 1 \end{array}$$