

# 超完全数 NEO

飯高 茂

平成 32 年 5 月 31 日

## 1 まえがき

梶田は  $\text{co}\varphi(x) = 2^e$  を満たす解は  $2^{e+1}$  の他は  $p^f\alpha$ , ( $\alpha = 2^e - 1$ : 素数) と書けることを示した.

## 2 余関数

$\text{co}\varphi(a) = p^e$ , ( $p > 2$ : 素数).

表 1:  $\text{co}\varphi(a) = 3^e$

$a$	素因数分解
e= 2	
21	$3 * 7$
27	$3^3$
e= 3	
63	$3^2 * 7$
81	$3^4$
115	$5 * 23$
187	$11 * 17$
e= 4	
189	$3^3 * 7$
237	$3 * 79$
243	$3^5$
781	$11 * 71$
1357	$23 * 59$
1537	$29 * 53$

$5 * 23$  のように異なる素数の積を 半素数という.  $\text{co}\varphi(x) = 3^e$  の解が 半素数  $qr$  ならば  $q + r = 3^e + 1$  となる. これらは数が多いし, 解となる理由もわかるのでこれら以外の解を調べるのが大切である.

表 2:  $\text{co}\varphi(a) = 3^e$

$a$	素因数分解
e= 5	
567	$3^4 * 7$
711	$3^2 * 79$
723	$3 * 241$
729	$3^6$
1195	$5 * 239$
2563	$11 * 233$

表 3:  $\text{co}\varphi(a) = 3^e$

$a$	素因数分解
e= 6	
1545	$3 * 5 * 103$
1701	$3^5 * 7$
1833	$3 * 13 * 47$
2133	$3^3 * 79$
2169	$3^2 * 241$
2181	$3 * 727$
2187	$3^7$
7909	$11 * 719$
20329	$29 * 701$
32101	$47 * 683$
35881	$53 * 677$

ここで, 3 で割れない半素数の解を考える.

$3^5 * 7, 3^3 * 79, 3^2 * 241, 3 * 727, 3^7$  が解になる.

$3^f * \alpha, (\alpha : \text{素数})$  の形であり これらを 底  $p$  が 3 で素数は 7, 79, 241, 327 であり是は他の指数  $5^e$  の場合も出てくるのでこれらを準メルセンヌ素数という.

さらに  $3 * 5 * 103, 3 * 13 * 47$  の解もありこれらは 半素数  $5 * 103, 3 * 13 * 47$  と 3 (一般には 3 のべき) との積が解となるので 準メルセンヌ半素数と言ってもよい.

しかしこれらの研究は難しい.

表 4:  $\text{co}\varphi(a) = 5^e$

$a$	素因数分解
e= 2	
69	$3 * 23$
125	$5^3$
133	$7 * 19$
e= 3	
625	$5^4$
1469	$13 * 113$
1853	$17 * 109$
2033	$19 * 107$
2369	$23 * 103$
2813	$29 * 97$
3293	$37 * 89$
3569	$43 * 83$
3713	$47 * 79$
3869	$53 * 73$
3953	$59 * 67$

表 5:  $\text{co}\varphi(a) = 5^e$

$a$	素因数分解
e= 4	
2737	$7 * 17 * 23$
3125	$5^5$
4333	$7 * 619$
7969	$13 * 613$
11533	$19 * 607$
43213	$79 * 547$
53869	$103 * 523$
63373	$127 * 499$
67693	$139 * 487$
75469	$163 * 463$
83569	$193 * 433$
90913	$229 * 397$
96673	$277 * 349$

表 6:  $\text{co}\varphi(a) = 5^e$

$a$	素因数分解
e= 5	
11765	$5 * 13 * 181$
15605	$5 * 3121$
15625	$5^6$
21833	$7 * 3119$
52853	$17 * 3109$
114293	$37 * 3089$
132569	$43 * 3083$
144713	$47 * 3079$
180953	$59 * 3067$
270293	$89 * 3037$
311369	$103 * 3023$
323033	$107 * 3019$
380873	$127 * 2999$
466133	$157 * 2969$
482969	$163 * 2963$

表 7:  $\text{co}\varphi(a) = 5^e$

$a$	素因数分解
e= 6	
44697	$3 * 47 * 317$
57145	$5 * 11 * 1039$
58825	$5^2 * 13 * 181$
68665	$5 * 31 * 443$
78025	$5^2 * 3121$
78125	$5^7$
109333	$7 * 15619$
296533	$19 * 15607$

表 8:  $\text{co}\varphi(a) = 7^e$

$a$	素因数分解
e= 1	
15	$3 * 5$
49	$7^2$
e= 2	
141	$3 * 47$
301	$7 * 43$
343	$7^3$
481	$13 * 37$
589	$19 * 31$



表 9:  $\text{co}\varphi(a) = 7^e$

$a$	素因数分解
e= 3	
1015	$5 * 7 * 29$
2107	$7^2 * 43$
2359	$7 * 337$
2401	$7^4$
4303	$13 * 331$
9703	$31 * 313$
11359	$37 * 307$
17263	$61 * 283$
18559	$67 * 277$
19783	$73 * 271$
24823	$103 * 241$
29143	$151 * 193$
29503	$163 * 181$

表 10:  $\text{co}\varphi(a) = 7^e$

$a$	素因数分解
e= 4	
7105	$5 * 7^2 * 29$
7197	$3 * 2399$
14749	$7^3 * 43$
15521	$11 * 17 * 83$
16513	$7^2 * 337$
16807	$7^5$
31057	$13 * 2389$
45277	$19 * 2383$
73501	$31 * 2371$
142801	$61 * 2341$
249937	$109 * 2293$
339901	$151 * 2251$
364957	$163 * 2239$
402001	$181 * 2221$
438397	$199 * 2203$
485917	$223 * 2179$
520801	$241 * 2161$
577501	$271 * 2131$
653857	$313 * 2089$
716497	$349 * 2053$
756817	$373 * 2029$
815137	$409 * 1993$

表 11:  $\text{co}\varphi(a) = 7^e$

$a$	素因数分解
e= 5	
47847	$3 * 41 * 389$
49735	$5 * 7^3 * 29$
78055	$5 * 67 * 233$
103243	$7^4 * 43$
115591	$7^3 * 337$
117649	$7^6$
340807	$37 * 61 * 151$
375847	$41 * 89 * 103$

表 12:  $\text{co}\varphi(a) = 7^e$

$a$	素因数分解
e= 6	
348145	$5 * 7^4 * 29$
532609	$7 * 11 * 6917$
707329	$7 * 37 * 2731$
722701	$7^5 * 43$
777553	$7 * 113 * 983$
809137	$7^4 * 337$
823501	$7 * 117643$
823543	$7^7$

### 3 不十分

$$\text{co}\varphi(a) = p^e$$

$a = \alpha p^f$ , ( $p \nmid \alpha$ : 素数) の形の解を底  $p$  の準メルセンヌ数という.

$$\varphi(a) = \varphi(\alpha)\varphi(p^f) = \varphi(\alpha)p^f - \varphi(\alpha)p^{f-1}$$

$$\text{co}\varphi(a) = \text{co}\varphi(\alpha)p^f + (\alpha - 1)p^{f-1} = p^f + (\alpha - 1)p^{f-1} = p^e$$

したがって

$$p^f + (\alpha - 1)p^{f-1} = p^e.$$

よって  $\alpha = p^{e+1-f} - p + 1$ . これは準メルセンヌ解  $\alpha p^f$  を与える.

i.  $f = e - 1$ .  $\alpha = p^2 - p + 1$ .  $p = 3$  なら  $\alpha = 7$

ii.  $f = e - 2$ .  $\alpha = p^3 - p + 1$ .  $p = 3$  なら  $\alpha = 25$  noprime!

iii.  $f = e - 3$ .  $\alpha = p^4 - p + 1$ .  $p = 3$  なら  $\alpha = 79$

**命題 1**  $\text{co}\varphi(x) = p^e$  の解

i.  $x = p^{e+1}$

ii.  $x = qr, q + r = p^e + 1$

**命題 2**  $\text{co}\sigma(x) = \sigma(p^e)$  の解

i.  $x = p^{e+1}$

ii.  $x = qr, q + r = \sigma(p^e) - 1$

2個の奇素数の積  $qr$  が解なら,  $q + r$  は偶数なので,  $p$  が奇数なら  $q + r = \sigma(p^e) - 1$  を満たす解は多い.

そこで, 積  $qr$  が解の場合を除外すると,  $\text{co}\varphi(x) = p^e$  の解の構造が見えてくる.

## 4 準メルセンヌ素数

$p = q^e - q + 1 + m$  が素数のとき, 法  $p$ , 平行移動  $m$  の準メルセンヌ素数という.

表 13:  $p = q^e - q + 1 + m$

$q = 2$	$m + 1$	$p$
$e = 2$	1	3
$e = 3$	1	7
$e = 5$	1	31
$e = 7$	1	127
$e = 13$	1	8191
$q = 3$	$m$	$p$
$e = 2$	1	7
$e = 4$	1	79
$e = 5$	1	241
$e = 6$	1	727
$e = 9$	1	19681
$q = 5$	$m$	$p$
$e = 5$	1	3121
$e = 7$	1	78121
$e = 15$	1	30517578121

表 14:  $p = q^e - q + m + 1$

$q = 7$	$m + 1$	$p$
$e = 2$	1	43
$e = 3$	1	337
$e = 6$	1	117643
$e = 9$	1	40353601
$e = 21$	1	558545864083284001

表 15:  $p = q^e - q + m + 1$

$q = 2$	$m + 1$	$p$
$e = 2$	3	5
$e = 4$	3	17
$e = 8$	3	257
$e = 16$	3	65537
$q = 3$	$m + 1$	$p$
$e = 2$	5	11
$e = 3$	5	29
$e = 4$	5	83
$e = 8$	5	6563
$e = 10$	5	59051
$e = 14$	5	4782971
$e = 15$	5	14348909



$$5 \quad \cos(x) = p^e, p = 3$$

表 16:  $\text{co}\sigma(x) = p^e, p = 3$

$e = 3$	
$a$	prime fct
44	$2^2 * 11$
74	$2 * 37$
81	$3^4$
$e = 4$	
243	$3^5$
791	$7 * 113$
1199	$11 * 109$
1391	$13 * 107$
1751	$17 * 103$
1919	$19 * 101$
2231	$23 * 97$
2759	$31 * 89$
3071	$37 * 83$
3239	$41 * 79$
3431	$47 * 73$
3551	$53 * 67$
3599	$59 * 61$

表 17:  $\cos\sigma(x) = p^e, p = 3$

$e = 5$	
308	$2^2 * 7 * 11$
729	$3^6$
$e = 6$	
1250	$2 * 5^4$
2187	$3^7$
2379	$3 * 13 * 61$
5291	$11 * 13 * 37$
5435	$5 * 1087$
24587	$23 * 1069$
30827	$29 * 1063$
32891	$31 * 1061$
43091	$41 * 1051$
45107	$43 * 1049$
55067	$53 * 1039$
60947	$59 * 1033$
62891	$61 * 1031$
72491	$71 * 1021$
74387	$73 * 1019$
80027	$79 * 1013$
83747	$83 * 1009$

表 18:  $\text{co}\sigma(x) = p^e, p = 3$

$e = 7$	
4364	$2^2 * 1091$
6561	$3^8$
$e = 8$	
19683	$3^9$
59927	$7^2 * 1223$
68831	$7 * 9833$
97889	$11^2 * 809$

整数  $m$  と  $p$ : 素数に対して,  $q = p^{e+1} - p + 1 + m$  は素数とする.  
 $a = p^e$  とするとき  $\bar{p} = p - 1, W = p^{e+1} - 1$  とおくと  $\bar{p}\sigma(a) = W$  となる.  
 $A = q = p^{e+1} - p + 1 + m$  は素数なので,  $\sigma(A) = A + 1$  を満たし  $A = q = p^{e+1} - p + 1 + m =$   
 $W - p + 2 + m = \bar{p}\sigma(a) - p + 2 + m$  になり  
 $\sigma(A) = A + 1 = p^{e+1} - p + 2 + m = ap - p + 2 + m$  を満たす.

**定義 1** 与えられた  $p, m$  に対して次式を満たす  $a$  を 素数  $p$  を底とし, 平行移動が  $m$  の超完全数  $NEO$ ,  $A$  をそのパートナーという.

$$A = \bar{p}\sigma(a) - p + 2 + m, \sigma(A) = A + 1 = p^{e+1} - p + 2 + m = ap - p + 2 + m,$$

**例 1**  $p = 2$  なら, 連立定義式は  $A = \bar{p}\sigma(a) - p + 2 + m = \sigma(a) + m, \sigma(A) = 2a + m$  となる.

**命題 3** 超完全数  $NEO$  において解  $a = p^e$  ならパートナー  $A$  は素数.

**Proof**  $a = p^e$  により  $W = p^{e+1} - 1$  とおくと  $W = ap - 1 = \bar{p}\sigma(a)$ .

$A = \bar{p}\sigma(a) - p + 2 + m = W - p + 2 + m =, \sigma(A) = ap - p + 2 + m = ap - 1 - p + 3 + m =$   
 $W - p + 3 + m = W - p + 2 + m + 1 = A + 1.$  よって  $\sigma(A) = A + 1.$  **q.e.d.**

ただし逆は成り立たない.

例  $p = 7, m = -6$  において  $a = 7 * 61 * 229, A = 684469.$

**命題 4** 超完全数  $NEO$  においてパートナー  $A$  が素数ならば  $\bar{p}\sigma(a) = ap - 1.$

$\bar{p}\sigma(a) = ap - 1$  なら  $a = p^e$  と書けるか という問題があり

$p = 2$  の場合は, これは正しいという予想は概完全数予想という.

$p = 3$  の場合は, 反例が知られていない.

$p = 5$  の場合は  $a = 77$  が反例.

$p = 7$  の場合は, 反例  $97783 = 7 * 61 * 229$  が知られている.

**Proof**

表 19: 超完全数 NEO,  $p = 3$

$m = -8$			
9	$3^2$	17	17
11	11	15	$3 * 5$
27	$3^3$	71	71
81	$3^4$	233	233
91	$7 * 13$	215	$5 * 43$
107	107	207	$3^2 * 23$
219	$3 * 73$	583	$11 * 53$
243	$3^5$	719	719
2187	$3^7$	6551	6551
4923	$3^2 * 547$	14239	$29 * 491$

表 20: 超完全数  $NEOp = 3$

$m = -7$			
3	3	0	0
5	5	4	$2^2$
$m = -6$			
9	$3^2$	19	19
13	13	21	$3 * 7$
27	$3^3$	73	73
729	$3^6$	2179	2179
1069	1069	2133	$3^3 * 79$
2187	$3^7$	6553	6553
$m = -5$			
3	3	2	2

表 21: 超完全数 NEO,  $p = 3$

$m = -4$			
2	2	1	1
3	3	3	3
935	$5 * 11 * 17$	2587	$13 * 199$
$m = -2$			
3	3	5	5
9	$3^2$	23	23
17	17	33	$3 * 11$
81	$3^4$	239	239
131	131	261	$3^2 * 29$
193	193	385	$5 * 7 * 11$
449	449	897	$3 * 13 * 23$



表 22: 超完全数  $NEO, p = 3$

$m = 0$			
3	3	7	7
19	19	39	$3 * 13$
27	$3^3$	79	79
81	$3^4$	241	241
139	139	279	$3^2 * 31$
243	$3^5$	727	727
6561	$3^8$	19681	19681
$m = 1$			
$m = 2$			
85	$5 * 17$	217	$7 * 31$
177	$3 * 59$	481	$13 * 37$
$m = 3$			

表 23: 超完全数 NEO,  $p = 3$

$m = 4$			
3	3	11	11
9	$3^2$	29	29
23	23	51	$3 * 17$
27	$3^3$	83	83
559	$13 * 43$	1235	$5 * 13 * 19$
2159	$17 * 127$	4611	$3 * 29 * 53$
2187	$3^7$	6563	6563
$m = 5$			
$m = 6$			
3	3	13	13
9	$3^2$	31	31
163	163	333	$3^2 * 37$
243	$3^5$	733	733
6561	$3^8$	19687	19687

表 24: 超完全数 NEO,  $p = 3$

$m = 8$			
1611	$3^2 * 179$	4687	$43 * 109$
2555	$5 * 7 * 73$	7111	$13 * 547$
$m = 9$			
$m = 10$			
3	3	17	17
27	$3^3$	89	89
29	29	69	$3 * 23$
81	$3^4$	251	251
121	$11^2$	275	$5^2 * 11$
179	179	369	$3^2 * 41$
237	$3 * 79$	649	$11 * 59$
2187	$3^7$	6569	6569
6107	$31 * 197$	12681	$3^2 * 1409$
9019	$29 * 311$	18729	$3^2 * 2081$

表 25: 超完全数 NEO  $q = 3, m = 0$

3	3	7	7
19	19	39	$3 * 13$
139	139	279	$3^2 * 31$
27	$3^3$	79	79
81	$3^4$	241	241
243	$3^5$	727	727
6561	$3^8$	19681	19681

表 26: 超完全数 NEO  $p = 5$

$m = 0$			
625	$5^4$	3121	3121
15625	$5^6$	78121	78121

表 27: 超完全数 NEO,  $h = p$

$m = 0$			
7	7	43	43
49	$7^2$	337	337
16807	$7^5$	117643	117643
129251	$17 * 7603$	821227	$11^3 * 617$
$m = -18$			
343	$7^3$	2377	2377
117649	$7^6$	823519	823519
7409	$31 * 239$	46057	$11 * 53 * 79$
$m = -14$			
343	$7^3$	2381	2381
2401	$7^4$	16787	16787
7	7	29	29
37	37	209	$11 * 19$
32341	32341	194033	$7 * 53 * 523$
138517	138517	831089	$7^3 * 2423$

表 28: 超完全数 NEO  $p = 7$

$m = -12$			
7	7	31	31
343	$7^3$	2383	2383
823543	$7^7$	5764783	5764783
2999	2999	17983	$7^2 * 367$
32351	$11 * 17 * 173$	225487	$443 * 509$

表 29: 超完全数 NEO,  $p = 7$

$m = -8$			
330379	$7 * 109 * 433$	2291507	$109 * 21023$
408859	$11^2 * 31 * 109$	2808947	$53 * 52999$
$m = -6$			
7	7	37	37
49	$7^2$	331	331
343	$7^3$	2389	2389
97783	$7 * 61 * 229$	684469	684469



表 30: 超完全数 NEO,  $p = 7$

$m = -2$			
	7	41	41
37	37	221	$13 * 17$
97	97	581	$7 * 83$
343	$7^3$	2393	2393
97783	$7 * 61 * 229$	684473	684473
823543	$7^7$	5764793	5764793
$m = 0$			
7	7	43	43
49	$7^2$	337	337
16807	$7^5$	117643	117643
129251	$17 * 7603$	821227	$11^3 * 617$

表 31: 超完全数 NEO , $p = 7$

$m = 3$			
129251	$17 * 7603$	821227	$11^3 * 617$
$m = 4$			
7	7	47	47
103	103	623	$7 * 89$
343	$7^3$	2399	2399
117649	$7^6$	823541	823541
823543	$7^7$	5764799	5764799

表 32: 超完全数 NEO,  $p = 7$

$m = 6$			
41	41	253	$11 * 23$
3209	3209	19261	$11 * 17 * 103$
91337	$149 * 613$	552601	$7 * 89 * 887$

## 6 完全数 NEO

整数  $m$  と  $p$ : 素数に対して,  $q = p^{e+1} - p + 1 + m$  は素数とする.

$a = p^e$  とするとき  $\bar{p} = p - 1, W = p^{e+1} - 1$  とおくと  $\bar{p}\sigma(a) = W$  となる.

$A = q = p^{e+1} - p + 1 + m$  は素数なので,  $\sigma(A) = A + 1$  を満たし  $A = q = p^{e+1} - p + 1 + m = W - p + 2 + m = \bar{p}\sigma(a) - p + 2 + m$  になり

$\alpha = aq = p^e q$  を  $p$  を底とし平行移動  $m$  の狭義の完全数 NEO という.  $\alpha$  の満たす方程式を作る.

$W = p^{e+1} - 1, \bar{p} = p - 1$  を以下で使う. ( $q = p^{e+1} - p + 1 + m = W - p + 2 + m$  に注意.)

$$\begin{aligned}\bar{p}\sigma(\alpha) &= W(q + 1) \\ &= Wq + W \\ &= p\alpha - q + W \\ &= p\alpha + p - 2 - m\end{aligned}$$

かくて次式ができた.

$$\bar{p}\sigma(\alpha) = p\alpha + p - 2 - m$$

**定義 2**  $\bar{p}\sigma(\alpha) = p\alpha + p - 2 - m$  を満たす  $\alpha$  を  $p$  を底とし平行移動  $m$  の完全数 NEO という.

$p = 2$  なら  $\sigma(\alpha) = p\alpha - m$  を満たす.

これは平行移動  $m$  の完全数の定義式である.

$p = 3$  なら  $2\sigma(\alpha) = 3\alpha + 1 - m$  を満たす.

これは定義でこれから出る完全数 NEO を調べる必要がある.

表 33: 完全数 NEO,  $p = 3$

$m = -329$	
200	$2^3 * 5^2$
658	$2 * 7 * 47$
946	$2 * 11 * 43$
1066	$2 * 13 * 41$
1258	$2 * 17 * 37$

表 34: 完全数 NEO,  $p = 3$

---

$m = -19$	
12	$2^2 * 3$
$m = -18$	
63	$3^2 * 7$
1647	$3^3 * 61$
18063	$3^4 * 223$
$m = -16$	
741	$3 * 13 * 19$
45477	$3^2 * 31 * 163$
$m = -14$	
99	$3^2 * 11$
147	$3 * 7^2$
18387	$3^4 * 227$

表 35: 完全数 NEO,  $p = 3$

---

$m = -13$	
16	$2^4$
$m = -12$	
117	$3^2 * 13$
1809	$3^3 * 67$
18549	$3^4 * 229$
$m = -8$	
153	$3^2 * 17$
957	$3 * 11 * 29$
1917	$3^3 * 71$
18873	$3^4 * 233$
24957	$3^2 * 47 * 59$
29637	$3^2 * 37 * 89$
67077	$3^2 * 29 * 257$

表 36: 完全数 NEO,  $p = 3$

$m = -6$	
171	$3^2 * 19$
1971	$3^3 * 73$
$m = -5$	
6	$2 * 3$
8	$2^3$
10	$2 * 5$
14	$2 * 7$
22	$2 * 11$
26	$2 * 13$
34	$2 * 17$

表 37: 完全数 NEO,  $p = 3$

$m = -4$	
25929	$3^2 * 43 * 67$
$m = -2$	
15	$3 * 5$
207	$3^2 * 23$
1023	$3 * 11 * 31$
2975	$5^2 * 7 * 17$
19359	$3^4 * 239$
$m = -1$	
4	$2^2$
$m = 0$	
21	$3 * 7$
2133	$3^3 * 79$
19521	$3^4 * 241$
176661	$3^5 * 727$

表 38: 完全数 NEO,  $p = 3$

$m = 1$	
2	2
$m = 2$	
3	3
9	$3^2$
27	$3^3$
81	$3^4$
243	$3^5$
729	$3^6$
2187	$3^7$
6561	$3^8$
19683	$3^9$
59049	$3^{10}$

表 39: 完全数 NEO,  $p = 3$

$m = 4$	
5	5
33	$3 * 11$
261	$3^2 * 29$
385	$5 * 7 * 11$
897	$3 * 13 * 23$
2241	$3^3 * 83$
26937	$3^2 * 41 * 73$
46593	$3^2 * 31 * 167$
$m = 6$	
7	7
39	$3 * 13$
279	$3^2 * 31$
$m = 9$	

表 40: 完全数 NEO,  $p = 3$

---

$m = 10$	
11	11
35	$5 * 7$
51	$3 * 17$
2403	$3^3 * 89$
20331	$3^4 * 251$
54723	$3 * 17 * 29 * 37$
68643	$3^2 * 29 * 263$
$m = 12$	
13	13
57	$3 * 19$
333	$3^2 * 37$
15609	$3 * 11^2 * 43$

表 41: 完全数 NEO,  $p = 3$

---

$m = 14$	
25	$5^2$
$m = 16$	
17	17
69	$3 * 23$
369	$3^2 * 41$
1221	$3 * 11 * 37$
20817	$3^4 * 257$
$m = 18$	
19	19
387	$3^2 * 43$
2619	$3^3 * 97$