2019 年 3 月 28 日

2 変数完全数問題

髙嶋 耕司

問題設定　$\dfrac{\sigma(a)}{a} = \dfrac{b}{\varphi(b)}$ が成り立つのはどういうときか。

$\sigma(n)$：約数和の関数（自然数nのすべての約数の和）
$\varphi(n)$：オイラー関数（自然数nとの最大公約数が 1 になる 1 以上n以下の自然数の個数）

$\sigma(a)/a = b/\varphi(b) = c$ の表　（$2 \leqq a \leqq 1000$，$2 \leqq b \leqq 1000$）

素因子のべきに依らない

c		a		b	
分数表記	小数表記	値	素因数分解	値	素因数分解の型
13/4	3.25	360	$2^3\cdot 3^2\cdot 5$	78，156，…	$2^k\cdot 3^l\cdot 13^m$
31/10	3.1	240	$2^4\cdot 3\cdot 5$	186，372，…	$2^k\cdot 3^l\cdot 31^m$
		600	$2^3\cdot 3\cdot 5^2$		
3	3	120	$2^3\cdot 3\cdot 5$	6，12，…	$2^k\cdot 3^l$
		672	$2^5\cdot 3\cdot 7$		
35/12	2.9166666…	864	$2^5\cdot 3^3$	70，140，…	$2^k\cdot 5^l\cdot 7^m$
		936	$2^3\cdot 3^2\cdot 13$		
65/24	2.7083333…	72	$2^3\cdot 3^2$	130，260，…	$2^k\cdot 5^l\cdot 13^m$
85/32	2.65625	384	$2^7\cdot 3$	170，340，…	$2^k\cdot 5^l\cdot 17^m$
31/12	2.5833333…	48	$2^4\cdot 3$	310，620	$2^k\cdot 5^l\cdot 31^m$
91/36	2.5277777…	36	$2^2\cdot 3^2$	182，364，…	$2^k\cdot 7^l\cdot 13^m$
5/2	2.5	24	$2^3\cdot 3$	10，20，…	$2^k\cdot 5^l$
7/3	2.3333333…	12	$2^2\cdot 3$	14，28，…	$2^k\cdot 7^l$
		234	$2\cdot 3^2\cdot 13$		
13/6	2.1666666…	18	$2\cdot 3^2$	26，52，…	$2^k\cdot 13^l$
2	2	6	$2\cdot 3$	2，4，…	2^k
		28	$2^2\cdot 7$		
		496	$2^4\cdot 31$		
255/128	1.9921875	128	2^7	255，765	$3^k\cdot 5^l\cdot 17^m$
31/16	1.9375	16	2^4	465	$3^k\cdot 5^l\cdot 31^m$
15/8	1.875	8	2^3	15，45，…	$3^k\cdot 5^l$
7/4	1.75	4	2^2	21，63，…	$3^k\cdot 7^l$
3/2	1.5	2	2	3，9，…	3^k

3 倍完全数

完全数

2 のべき乗

右辺 $\dfrac{b}{\varphi(b)}$ はbの素因子のべきによらない。

証明：

$b=p^k\cdot q^l$（p，q は相異なる素数、k，lは整数（≧1））の場合を考える。

$$\varphi(b)=\varphi(p^k\cdot q^l)=\varphi(p^k)\varphi(q^l)=p^{k-1}(p-1)\cdot q^{l-1}(q-1)$$

$$\frac{b}{\varphi(b)}=\frac{p^k}{p^{k-1}(p-1)}\cdot\frac{q^l}{q^{l-1}(q-1)}=\frac{p}{p-1}\cdot\frac{q}{q-1}$$

となり、$\dfrac{b}{\varphi(b)}$は素因子p，qのべきk，lに依存しない。これはbの素因子数が増減しても同様である。よって、$\dfrac{b}{\varphi(b)}$はbの素因子のべきによらない。

（証明終）

等式 $\dfrac{\sigma(a)}{a}=\dfrac{b}{\varphi(b)}$ は$b=$素数（≠2，3）のとき、成り立たない。

証明：

$b=$ 奇素数（≧5）で、等式が成り立つと仮定する。

等式の右辺は $\dfrac{b}{b-1}$ で、$\dfrac{\text{奇数}}{\text{偶数}}$ となる。

等式が成り立つためには、左辺の a は偶数でなければならない。
よって、$a=2N$ （N＝整数（≧1））とおける。

一般に、$N=2^k\cdot 3^l\cdot 5^m\cdot\cdots$（$k$，$l$，$m$，…は整数（≧0））と表せる。

このとき、$a=2^{k+1}\cdot 3^l\cdot 5^m\cdot\cdots$となり、

$$\text{左辺}=\frac{\sigma(a)}{a}=\frac{2^{k+2}-1}{2^{k+1}}\cdot\frac{\frac{3^{l+1}-1}{2}}{3^l}\cdot\frac{\frac{5^{m+1}-1}{4}}{5^m}\cdot\cdots\geq\frac{3}{2}$$

一方、

$$\text{右辺}=\frac{b}{b-1}\leq\frac{5}{4}$$

$$\text{左辺}=\frac{\sigma(a)}{a}\geq\frac{3}{2}>\frac{5}{4}\geq\frac{b}{b-1}=\frac{b}{\varphi(b)}=\text{右辺}$$

となり、矛盾する。

よって、$b=$ 奇素数（≧5）のとき、等式は成り立たない。

（証明終）

2 変数スーパー完全数問題

問題設定 $\dfrac{\sigma(\sigma(a))}{a} = \dfrac{b}{\varphi(\varphi(b))}$ が成り立つのはどういうときか。

$\sigma(n)$：約数和の関数（自然数nのすべての約数の和）
$\varphi(n)$：オイラー関数（自然数nとの最大公約数が 1 になる 1 以上n以下の自然数の個数）

$\sigma(\sigma(a))/a = b/\varphi(\varphi(b)) = c$ の表　（$2 \leqq a \leqq 1000$, $2 \leqq b \leqq 1000$）

c		a		b	
分数表記	小数表記	値	素因数分解	値	素因数分解
分数表記	小数表記	値	素因数分解	値	素因数分解
39/4	9.75	120	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	78, 156, …	$2^k \cdot 3^l \cdot 13$
		672	$2^5 \cdot 3 \cdot 7$		
9	9	168	$2^3 \cdot 3 \cdot 7$	18, 36, …	$2^k \cdot 3^{l+1}$
91/12	7.5833333…	96	$2^5 \cdot 3$	182, 364, …	$2^k \cdot 7 \cdot 13$
7	7	24	$2^3 \cdot 3$	14, 28, …	$2^k \cdot 7$
13/2	6.5	30	$2 \cdot 3 \cdot 5$	26, 52, …	$2^k \cdot 13$
6	6	42	$2 \cdot 3 \cdot 7$	6, 12, …	$2^k \cdot 3$
		84	$2^2 \cdot 3 \cdot 7$		
		160	$2^5 \cdot 5$		
		336	$2^4 \cdot 3 \cdot 7$		
259/48	5.3958333…	768	$2^8 \cdot 3$	777	$3 \cdot 7 \cdot 37$
4	4	15	$3 \cdot 5$	4, 8, …	2^{k+1}
13/4	3.25	32	2^5	13	13
3	3	8	2^3	3	3
		21	$3 \cdot 7$		
		512	2^9		
2	2	2	2	2	2
		4	2^2		
		16	2^4		
		64	2^6		

素因子のべきに依る場合がある

(2,9)-完全数

(2,7)-完全数

(2,6)-完全数

(2,4)-完全数

(2,3)-完全数

スーパー完全数

$$\boxed{b = 2^k \cdot p^l \text{のとき} \quad \frac{b}{\varphi(\varphi(b))} \quad \text{が整数になるのは 4 通りに限られる。}}$$

（ただし、$p =$ 奇素数$(\geqq 3)$，$k \geqq 1$，$l \geqq 1$）

証明：

$$\varphi(b) = \varphi(2^k) \cdot \varphi(p^l)$$

$$= 2^{k-1} \cdot p^{l-1}(p-1)$$

（$p-1 = 2^j \cdot m$（$j \geqq 1$，m：奇数$\geqq 1$）とおく。）

$$= 2^{k-1} \cdot p^{l-1} \cdot 2^j \cdot m$$

$$= 2^{k+j-1} \cdot m \cdot p^{l-1}$$

$$\varphi\left(\varphi(b)\right) = 2^{k+j-2} \cdot \varphi(m) \cdot \varphi(p^{l-1})$$

ｉ）$l = 1$　のとき

$$\varphi\left(\varphi(b)\right) = 2^{k+j-2} \cdot \varphi(m)$$

$$\frac{b}{\varphi(\varphi(b))} = \frac{2^k \cdot p}{2^{k+j-2} \cdot \varphi(m)} = 2^{2-j} \cdot \frac{p}{\varphi(m)}$$

右辺が整数になるのは、次の 3 通り。

①$j = 1$，$\varphi(m) = 1$　→　$m = 1$，$p = 3$，　$b = 2^k \cdot 3$，　$\dfrac{b}{\varphi(\varphi(b))} = 6$

②$j = 1$，$\varphi(m) = 2$　→　$m = 3$，$p = 7$，　$b = 2^k \cdot 7$，　$\dfrac{b}{\varphi(\varphi(b))} = 7$

③$j = 2$，$\varphi(m) = 1$　→　$m = 1$，$p = 5$，　$b = 2^k \cdot 5$，　$\dfrac{b}{\varphi(\varphi(b))} = 5$

ⅱ）$l \geqq 2$　のとき

$$\varphi\left(\varphi(b)\right) = 2^{k+j-2} \cdot \varphi(m) \cdot p^{l-2}(p-1)$$

$$= 2^{k+j-2} \cdot \varphi(m) \cdot p^{l-2} \cdot 2^j \cdot m$$

$$= 2^{k+2j-2} \cdot \varphi(m) \cdot m \cdot p^{l-2}$$

$$\frac{b}{\varphi(\varphi(b))} = \frac{2^k \cdot p^l}{2^{k+2j-2} \cdot \varphi(m) \cdot m \cdot p^{l-2}} = 2^{2-2j} \cdot \frac{p^2}{\varphi(m) \cdot m}$$

右辺が整数になるのは、次の 1 通り。

④$j = 1$，$\varphi(m) = 1$　→　$m = 1$，$p = 3$，　$b = 2^k \cdot 3^l$，　$\dfrac{b}{\varphi(\varphi(b))} = 9$

（証明終）

$b = 2^k \cdot p^l \cdot q^t$のとき $\dfrac{b}{\varphi(\varphi(b))}$ は整数にならない。

（ただし、p, q：奇素数$\left(p < q\right)$，$k \geqq 1$，$l \geqq 1$，$t \geqq 1$）

証明：

$$\varphi(b) = \varphi(2^k) \cdot \varphi(p^l) \cdot \varphi(q^t)$$

$$= 2^{k-1} \cdot p^{l-1}(p-1) \cdot q^{l-1}(q-1)$$

ここで、$p - 1 = 2^i \cdot m$，$q - 1 = 2^j \cdot n$ $(i, j \geqq 1$，m, n：奇数$\geqq 1)$ とおく。

$$\varphi(b) = 2^{k-1} \cdot p^{l-1} \cdot 2^i \cdot m \cdot q^{t-1} \cdot 2^j \cdot n$$

$$= 2^{k+i+j-1} \cdot m \cdot n \cdot p^{l-1} \cdot q^{t-1}$$

$$\varphi\left(\varphi(b)\right) = 2^{k+i+j-2} \cdot \varphi\left(m \cdot n \cdot p^{l-1} \cdot q^{t-1}\right)$$

$$\frac{b}{\varphi\left(\varphi(b)\right)} = \frac{2^k \cdot p^l \cdot q^t}{2^{k+i+j-2} \cdot \varphi\left(m \cdot n \cdot p^{l-1} \cdot q^{t-1}\right)}$$

$$= 2^{2-i-j} \cdot \frac{p^l \cdot q^t}{\varphi\left(m \cdot n \cdot p^{l-1} \cdot q^{t-1}\right)}$$

右辺が整数になる条件は、$2 - i - j = 0$ と $\varphi\left(m \cdot n \cdot p^{l-1} \cdot q^{t-1}\right) = 1$ から

$i = j = m = n = l = t = 1$

この条件は $p = q = 3$ となり、前提の $p < q$ を満足せず、成立しない。

したがって、$\dfrac{b}{\varphi\left(\varphi(b)\right)}$ は整数にならない。

（証明終）