スーパー双子素数と
ウルトラ三つ子素数

東京都世田谷区立池之上小学校5年
高橋　洋翔

双子素数とは？

p, p+2がともに素数である組

例 : (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31)・・・

無限にあるかどうかは未解決

飯高先生の未解決問題1　スーパー双子素数

与えられた整数(a > 0, b) に対して,
p = aq + b とおくとき　p, q がともに素数なら
(p, q)をa, b に関しての超(スーパー) 双子素数という.

（1）超双子素数が無限にあるa, b はどんな条件を満たすか
（2）超双子素数が有限個のa, b は存在するか
（3）与えられた(a > 0, b) に対して超双子素数を無限に生成する方程式(σ(a),ϕ(a) を用いてよい) を作れ

σ(x) , ϕ(x)とは？

σ(x) : 自然数 x について、x の約数の総和

ϕ(x) : 自然数 x について、x 以下の自然数のうち
x と互いに素なものの個数

例 : ϕ(3) = 2, ϕ(6) = 2

x ≧ 2 のとき、ϕ(x) ≦ x - 1
等号成立はxが素数

飯高先生の未解決問題2　ウルトラ三つ子素数

与えられた整数($a > 0, b, c > 0, d$) に対して
$p = aq + b$, $r = cq + d$ とおくとき p, q, r がともに素数なら
(p, q, r) をa, b, c, d に関してのウルトラ3つ子素数という.

（1）ウルトラ3つ子素数が無限にあるa, b, c, d はどんな条件を満たすか
（2）ウルトラ3つ子素数が有限個のa, b, c, d は存在するか
（3）与えられた(a, b, c, d) に対してウルトラ三つ子素数を無限に生成する方程式($\sigma(a)$,$\phi(a)$ を用いてよい)を作れ

問題1（3）

与えられた整数($a > 0, b$) に対して, $p = aq + b$ とおくときp, q がともに素数なら(p, q)をa, b に関しての超(スーパー) 双子素数という.

（3）与えられた($a > 0, b$) に対して超双子素数を無限に生成する方程式($\sigma(a)$,$\phi(a)$ を用いてよい) を作れ

$\phi(a\phi(q) + a + b) = aq + b - 1$
を満たすqについて、
$(aq + b, q)$はa, b に関しての超双子素数

＜理由＞
$X \geqq 2$のとき
$\phi(x) \leqq x-1$　等号成立はxが素数

$\phi(a\phi(q) + a + b) \leqq a\phi(q) + a + b - 1 \leqq aq + b - 1$

等号が両方成り立たなければならないから、
qもaq+bも素数になる。

問題1（2）

与えられた整数($a > 0, b$) に対して,
$p = aq+b$ とおくとき　p, q がともに素数なら
(p, q)をa, b に関しての超(スーパー) 双子素数という.

（2）超双子素数が有限個のa, b は存在するか

存在する。

$a = 1$, b = 奇素数-2 に関しての超双子素数（q+奇素数-2, q）
は（奇素数,2）のみ

＜理由＞
2つの素数の差（奇素数-2）が奇数になるから、小さい方の素数qは2。

問題1（1）

与えられた整数($a > 0, b$) に対して,
$p = aq + b$ とおくとき　p, q がともに素数なら
(p, q)をa, b に関しての超(スーパー) 双子素数という.

（1）超双子素数が無限にあるa, b はどんな条件を満たすか

a, b は互いに素 （aとbが互いに素でなければaq+bはaとbの公約数を約数に持ってしまう）

かつ

$a + b \equiv 1 \pmod 2$ （aq+bを奇数にするため）

<u>【予想】上記の条件を満たすとき、超双子素数は無限にあるのではないか。</u>

$a = 1, b = 2$に関しての超双子素数$(q+2, q)$

(5, 3) , (7, 5) , (13, 11) , (19 , 17) , (31 , 29)･･･

$a = 4, b = 5$に関しての超双子素数$(4q+5, q)$

(13, 2) , (17, 3) , (73, 17) , (97, 23) , (193, 47)･･･

問題2（3）

与えられた整数$(a > 0, b, c > 0, d)$ に対して
$p = aq + b, r = cq + d$ とおくとき　p, q, r がともに素数なら
(p, q, r) をa, b, c, d に関してのウルトラ3つ子素数という.

（3）与えられた(a, b, c, d) に対してウルトラ3つ子素数を無限に生成する方程式($\sigma(a), \phi(a)$ を用いてよい) を作れ

$\phi(a\phi(q) + a + b) + \phi(c\phi(q) + c + d) = (a + c)q + b + d - 2$
を満たすqについて、
$(aq+b, q, cq+d)$ はa, b, c, d に関してのウルトラ3つ子素数.

＜理由＞
$x \geqq 2$のとき
$\phi(x) \leqq x-1$　等号成立はxが素数

$\phi(a\phi(q) + a + b) \leqq a\phi(q) + a + b - 1 \leqq aq + b - 1$
$\phi(c\phi(q) + c + d) \leqq c\phi(q) + c + d - 1 \leqq cq + d - 1$

等号がすべて成り立たなければならないから、
qもaq+bもcq+dも素数。

問題2（2）

与えられた整数$(a > 0, b, c > 0, d)$ に対して
$p = aq + b, r = cq + d$ とおくとき　p, q, r がともに素数なら
(p, q, r) をa, b, c, d に関してのウルトラ3つ子素数という.

(2)ウルトラ3つ子素数が有限個のa, b, c, d は存在するか

存在する。

$a = 1, b = 1, c = 1, d = 3$
に関してのウルトラ三つ子素数（q+1, q, q+3）は
（3, 2, 5）のみ。

問題2（1）

与えられた整数$(a > 0, b, c > 0, d)$ に対して
$p = aq + b, r = cq + d$ とおくとき　p, q, r がともに素数なら
(p, q, r) をa, b, c, d に関してのウルトラ3つ子素数という.

（1）ウルトラ3つ子素数が無限にあるa, b, c, d はどんな条件を満たすか

a, b は互いに素　かつ
$a + b \equiv 1$（mod2）かつ
c, dは互いに素　かつ
$c + d \equiv 1$（mod2）

<u>【予想】上記の条件を満たすとき（下記の除外条件を除く）、</u>
<u>ウルトラ三つ子素数は無限にあるのではないか。</u>

例：$a = 1, b = 2, c = 1, d = 6$に関してのウルトラ三つ子素数（q+2 , q, q+6）
(7, 5, 11), (13, 11, 17), (19, 17, 23), (43, 41, 47), (103, 101, 107)・・・

ただし、上記の条件を満たすものの中で、除外されるものがある。
（つまり、問題２（２）の解になる。）

問題2（1）の除外条件

＜僕が最初に考えた除外条件＞

$a \equiv c \equiv 1$　(mod3)　かつ
$b + d \equiv 0$　(mod3)
（※　かつ　$b \not\equiv 0$ (mod3)
を水谷一氏の指摘から追加。）

例：a=1,b=2,c=1,d=4に関してのウルトラ三つ子素数（q+2,q,q+4）は
（5,3,7）のみ

＜水谷一氏による除外条件＞

$ac \equiv -bd \not\equiv 0$　（mod3）

このとき、aq+b, q, cq+d のどれかが必ず3の倍数になり、
３の倍数である素数は3のみなので、解が有限になる。

例：a=4, b=5, c=5, d=8に関してのウルトラ三つ子素数（4q+5, q, 5q+8）
は　（17, 3, 23）のみ

参考文献

- 飯高茂(2017)『数学の研究をはじめよう(IV) 完全数の新しい世界』現代数学社

御清聴ありがとうございました。