

スーパー双子素数と ウルトラ三つ子素数の分布の予想

東京都世田谷区立池之上小学校5年
高橋 洋翔

双子素数の分布

それでは、

$t \leq x$ の双子素数 $(t, t+2)$ の組の数

$$\sim \int_2^x \frac{1}{\log t \log(t+2)} dt$$

となるか？

⇒ t が素数になる事象と、 $t+2$ が素数になる事象は、独立ではないので、調整が必要。

ガウスの素数定理

t 近辺の数が素数である確率は $\frac{1}{\log t}$

$$x \text{ 以下の素数の数} \sim \int_2^x \frac{1}{\log t} dt$$

ハーディ・リトルウッドの予想①

$t \leq x$ の双子素数 $(t, t+2)$ の組の数

$$\sim 2 \prod_{p \geq 3 \text{ の素数}} \frac{p(p-2)}{(p-1)^2} \int_2^x \frac{1}{\log t \log(t+2)} dt$$

$$\ast \prod \frac{p(p-2)}{(p-1)^2} = 0.6601 \dots$$

2を乗じる理由

- もしも、 t が2の倍数である事象と、 $t+2$ が2の倍数である事象が独立なら、両方とも2の倍数でない確率は $\frac{1}{4}$
- 実際には、 t が2の倍数でなければ、 $t+2$ も2の倍数でないので、両方とも2の倍数でない確率は $\frac{1}{2}$

⇒ したがって、 $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$ を乗じる必要

4

$\prod \frac{p(p-2)}{(p-1)^2}$ を乗じる理由

- もしも、 t が p の倍数である事象と、 $t+2$ が p の倍数である事象が独立なら、両方とも p の倍数でない確率は $\frac{p-2}{(p-1)^2}$
- 実際には、 t と $t+2$ が両方とも p の倍数でない確率は $\frac{p-2}{p}$

⇒ したがって、3以上のすべての素数 p について、

$$\frac{\frac{p-2}{p}}{\frac{p-2}{(p-1)^2}} = \frac{p(p-2)}{(p-1)^2} \text{ を乗じる必要}$$

5

ハーディ・リトルウッドの予想②

$t \leq x$ の素数の組 $(t, t+2k)$ の数

$$\sim 2 \prod_{p \geq 3 \text{ の素数}} \frac{p(p-2)}{(p-1)^2} \int_2^x \frac{1}{\log t \log(t+2k)} dt$$

$$\times \prod_{\substack{p \geq 3 \text{ の素数で} \\ p \text{ が } k \text{ の約数}}} \frac{p-1}{p-2}$$

6

$\prod \frac{p-1}{p-2}$ を乗じる理由

- p が k の約数の場合、 t と $t+2k$ が両方とも p の倍数でない確率は $\left(\frac{p-2}{p} \text{ ではなく、} \right) \frac{p-1}{p}$

⇒ したがって、このような条件を満たすすべての素数 p について、調整を上書きする必要がある、

$$\frac{\frac{p-1}{p}}{\frac{p-2}{p}} = \frac{p-1}{p-2} \text{ を乗じる必要}$$

7

超双子素数の分布の予想

$t \leq x$ の超双子素数 $(at+b, t)$ の組の数
 (a, b は互いに素 かつ $a + b \equiv 1 \pmod{2}$)

$$\sim 2 \prod_{p \geq 3 \text{ の素数}} \frac{p(p-2)}{(p-1)^2} \int_2^x \frac{1}{\log(at+b) \log t} dt$$

$$\times \prod_{\substack{p \geq 3 \text{ の素数で} \\ p \text{ が } a \text{ か } b \text{ の約数}}} \frac{p-1}{p-2}$$

8

$\prod \frac{p-1}{p-2}$ を乗じる理由

• p が a か b の約数の場合、 $at+b$ と t が両方とも p の倍数でない確率は $(\frac{p-2}{p}$ ではなく、) $\frac{p-1}{p}$

⇒ したがって、このような条件を満たすすべての素数 p について、調整を上書きする必要がある、

$$\frac{\frac{p-1}{p}}{\frac{p-2}{p}} = \frac{p-1}{p-2} \text{ を乗じる必要}$$

9

具体例

$t \leq x$ の超双子素数 $(3t+10, t)$ の組の数

$$\sim 2 \prod_{p \geq 3 \text{ の素数}} \frac{p(p-2)}{(p-1)^2} \int_2^x \frac{1}{\log(3t+10) \log t} dt$$

$$\times \frac{3-1}{3-2} \times \frac{5-1}{5-2}$$

x	100	1,000	10,000	100,000	1,000,000
実際	15	79	472	2,941	20,210
予想	23	96	492	2,993	20,203

10

ハーディ・リトルウッドの予想③

$t \leq x$ の三つ子素数 $(t, t+2, t+6)$ の組の数

$$\sim 4 \cdot \frac{9}{8} \prod_{p \geq 5 \text{ の素数}} \frac{p^2(p-3)}{(p-1)^3} \int_2^x \frac{1}{\log t \log(t+2) \log(t+6)} dt$$

$$\times 4 \cdot \frac{9}{8} \prod_{p \geq 5 \text{ の素数}} \frac{p^2(p-3)}{(p-1)^3} = 2.858248596 \dots$$

11

4を乗じる理由

- もしも、 t が2の倍数である事象と、 $t+2$ が2の倍数である事象と、 $t+6$ が2の倍数である事象が独立なら、3つとも2の倍数でない確率は $\frac{1}{8}$
- 実際には、 t が2の倍数でなければ、 $t+2$ も $t+6$ も2の倍数でないので、3つとも2の倍数でない確率は $\frac{1}{2}$

⇒ したがって、 $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 4$ を乗じる必要

12

$\frac{9}{8}$ を乗じる理由

- もしも、 t が3の倍数である事象と、 $t+2$ が3の倍数である事象と、 $t+6$ が3の倍数である事象が独立なら、3つとも3の倍数でない確率は $\frac{8}{27}$
- 実際には、 t が3の倍数でなければ、 $t+6$ も3の倍数でないので、3つとも3の倍数でない確率は $\frac{3-2}{3}$

⇒ したがって、 $\frac{1}{\frac{8}{27}} = \frac{9}{8}$ を乗じる必要

13

$\prod \frac{p^2(p-3)}{(p-1)^3}$ を乗じる理由

- もしも、 t が p の倍数である事象と、 $t+2$ が p の倍数である事象と、 $t+6$ が p の倍数である事象が独立なら、3つとも p の倍数でない確率は $\frac{(p-1)^3}{p^3}$
- 実際には、 t と $t+2$ と $t+6$ が3つとも p の倍数でない確率は $\frac{p-3}{p}$

⇒ したがって、5以上のすべての素数 p について、

$$\frac{\frac{p-3}{p}}{\frac{(p-1)^3}{p^3}} = \frac{p^2(p-3)}{(p-1)^3} \text{ を乗じる必要}$$

14

ウルトラ三つ子素数の分布の予想

$t \leq x$ のウルトラ三つ子素数($at+b, ct+d$)の組の数
 (a, b は互いに素 かつ $a+b \equiv 1 \pmod{2}$ かつ
 c, d は互いに素 かつ $c+d \equiv 1 \pmod{2}$ かつ
 $ac \equiv -bd \not\equiv 0 \pmod{3}$ ではない(水谷一氏))

$$\sim 4 \cdot \frac{9}{8} \prod_{p \geq 5 \text{ の素数}} \frac{p^2(p-3)}{(p-1)^3} \int_2^x \frac{1}{\log(at+b) \log t \log(ct+d)} dt$$

(3 が a か b の約数)かつ(3 が c か d の約数)の場合) $\times \frac{3-1}{3-2}$

$$\times \prod_{p \geq 5} \frac{p-2}{p-3}$$

$p \geq 5$ の素数で、(p が a か b の約数)または(p が c か d の約数)
 または(p が $a-c$ と $b-d$ の公約数)または(p が $a+c$ と $b+d$ の公約数)

$$\times \prod_{p \geq 5} \frac{p-1}{p-2}$$

$p \geq 5$ の素数で、(p が a か b の約数)かつ(p が c か d の約数)

15

$\frac{3-1}{3-2}$ を乗じる理由

• (3がaかbの約数)かつ(3がcかdの約数)ならば、
at+b,t,ct+dが3つとも3の倍数でない確率は

$$\left(\frac{3-2}{3} \text{ではなく、}\right) \frac{3-1}{3}$$

⇒ したがって、このような場合、調整を上書きする
の必要があり、

$$\frac{\frac{3-1}{3}}{\frac{3-2}{3}} = \frac{3-1}{3-2} \text{ を乗じる必要}$$

16

$\prod \frac{p-2}{p-3}$ を乗じる理由

• (pがaかbの約数)または(pがcかdの約数)または(p
がa-cとb-dの公約数)または(pがa+cとb+dの公約数)の
場合、

at+b,t,ct+dが3つともpの倍数でない確率は

$$\left(\frac{p-3}{p} \text{ではなく、}\right) \frac{p-2}{p}$$

⇒ したがって、このような条件を満たすすべての素数p
について、調整を上書きする必要があり、

$$\frac{\frac{p-2}{p}}{\frac{p-3}{p}} = \frac{p-2}{p-3} \text{ を乗じる必要}$$

17

$\prod \frac{p-1}{p-2}$ を乗じる理由

• (pがaかbの約数)かつ(pがcかdの約数)の場合、
at+b,t,ct+dが3つともpの倍数でない確率は

$$\left(\frac{p-2}{p} \text{ではなく、}\right) \frac{p-1}{p}$$

⇒ したがって、このような条件を満たすすべての素数p
について、調整を上書きする必要があり、

$$\frac{\frac{p-1}{p}}{\frac{p-2}{p}} = \frac{p-1}{p-2} \text{ を乗じる必要}$$

18

具体例

$t \leq x$ のウルトラ三つ子素数(3t+10,t,4t+3)の組
の数

$$\sim 4 \cdot \frac{9}{8} \prod_{p \geq 5 \text{の素数}} \frac{p^2(p-3)}{(p-1)^3} \int_2^x \frac{1}{\log(3t+10) \log t \log(4t+3)} dt$$

$$\times \frac{3-1}{3-2} \times \frac{5-2}{5-3}$$

x	100	1,000	10,000	100,000	1,000,000
実際	8	29	127	667	3,706
予想	13	37	136	641	3,556

19

御清聴ありがとうございました。