2 変数完全数問題　$b=$ 奇数解 (素因子数 5) の考察

髙嶋耕司

2020 年 6 月 9 日

2 変数完全数問題は，自然数 a，b がどのようなとき次式を満たすかという問題である．

$$\frac{\sigma(a)}{a}=\frac{b}{\varphi(b)} \tag{1}$$

ここで，$\sigma(n)$ はユークリッド関数（自然数 n のすべての約数の和），$\varphi(n)$ はオイラー関数（自然数 n 以下で n と互いに素な自然数の個数）である．

b が奇数で素因子数が 1〜4 のときの b 解を定理 1〜4 に示す (証明は略す)．ただし，$b/\varphi(b)$ は b の素因子のべきによらないので，簡単のため，b の素因子のべきは 1 とする．

定理 1　$b=p$　(p：奇素数) のとき，等式 (1) の b 解は 3 に限られる．

このとき，式 (1) の解は，$a=2$，$b=3$ が唯一となる．

定理 2　$b=pq$　(p，q は奇素数，$p<q$) のとき，等式 (1) の b 解は $3*5$ または $3*7$.

このとき，式 (1) の解は，$a=2^3$，$b=3*5$ と $a=2^2$，$b=3*7$ に限られる．

定理 3　$b=pqr$　(p，q，r は奇素数，$p<q<r$) のとき，等式 (1) の b 解は $3*5*r$.

このとき，式 (1) の解を $(a,\ b)$ で表すと，次の 3 解がわかっている．

（2^9*31，$3*5*11$），（2^7，$3*5*17$），（2^4，$3*5*31$）

$17\le r$ の解は，2 番目と 3 番目に示した解以外にはない．一方，$7\le r\le 13$ の解は，1 番目に示した解以外にあるか否か，不明である．

定理 4　$\underline{b = pqrs \quad (p,\ q,\ r,\ s \text{ は奇素数}, p < q < r < s)}$ のとき，等式 (1) の b 解は $3 * 5 * r * s$ に限られる．

このとき，式 (1) の解を $(a,\ b)$ で表すと，次の 2 解がわかっている．

$(2^{10} * 23,\ 3 * 5 * 11 * 89)$，$(2^{15},\ 3 * 5 * 17 * 257)$

$b/\varphi(b) < 2$ という条件下では, 2 番目に示した解以外にはない．一方, $b/\varphi(b) \geq 2$ の解は，1 番目に示した解以外にあるか否か，不明である．

これから，奇数 b の素因子数が 5 の場合を議論する．

定理 5　$b = pqrst \quad (p,\ q,\ r,\ s,\ t$ は奇素数, $p < q < r < s < t)$ のとき，等式 (1) の b 解は $3 * 5 * r * s * t$ に限られる．

証明：　$p \geq 5$ で式 (1) が成り立つと仮定する．

$$\text{右辺} = \frac{b}{\varphi(b)} \leq \frac{5}{4} * \frac{7}{6} * \frac{11}{10} * \frac{13}{12} * \frac{17}{16} = \frac{17017}{9216}$$

$$a = 2^e u \quad (e \geq 5,\ u : \text{奇数})$$

$$\text{左辺} = \frac{\sigma(a)}{a} \geq \frac{2^6 - 1}{2^5} = \frac{63}{32} = \frac{18144}{9216}$$

となり矛盾する．よって，$p = 3$ に限られる．

$p = 3,\ q \geq 13$ のとき，式 (1) が成立すると仮定する．

$$\frac{b}{\varphi(b)} \leq \frac{3}{2} * \frac{13}{12} * \frac{17}{16} * \frac{19}{18} * \frac{23}{22} = \frac{96577}{50688} \quad , \quad \frac{\sigma(a)}{a} \geq \frac{2^6 - 1}{2^5} = \frac{63}{32} = \frac{99792}{50688}$$

となり矛盾する．よって，$5 \leq q \leq 11$.

$p = 3,\ q = 11$ のとき，$a = 2^e 5^k u$, $(e \geq 5,\ k \geq 1,\ u : \text{奇数},\ u \nmid 5)$ となり，

$$\frac{b}{\varphi(b)} \leq \frac{3}{2} * \frac{11}{10} * \frac{17}{16} * \frac{19}{18} * \frac{23}{22} = \frac{81719}{42240} \quad , \quad \frac{\sigma(a)}{a} \geq \frac{2^6 - 1}{2^5} * \frac{6}{5} = \frac{378}{160} = \frac{99792}{42240}$$

で矛盾する．よって，$5 \leq q \leq 7$.

以下，$p=3$，$q=7$ の場合に式 (1) が成立すると仮定したときの矛盾を導く．

$r \geq 23$ のとき，$a=2^e u$，$(e \geq 5$，u：奇数$)$ と表せるので，

$$\frac{b}{\varphi(b)} \leq \frac{3}{2}*\frac{7}{6}*\frac{23}{22}*\frac{29}{28}*\frac{31}{30}=\frac{20677}{10560} \quad , \quad \frac{\sigma(a)}{a} \geq \frac{2^6-1}{2^5}=\frac{63}{32}=\frac{20790}{10560}$$

となり矛盾する．よって，$11 \leq r \leq 19$.

$r=19$ のとき，$a=2^e 3^k u$，$(e \geq 5$，$k \geq 2$，u：奇数，$u \nmid 3)$ と表せるので，

$$\frac{b}{\varphi(b)} \leq \frac{3}{2}*\frac{7}{6}*\frac{19}{18}*\frac{23}{22}*\frac{29}{28}=\frac{12673}{6336} \quad , \quad \frac{\sigma(a)}{a} \geq \frac{2^6-1}{2^5}*\frac{3^2+3+1}{3^2}=\frac{91}{32}=\frac{18018}{6336}$$

となり矛盾する．よって，$r=19$ は解になり得ない．

$r=17$ のとき，$a=2^e u$，$(e \geq 8$，u：奇数$)$ と表せるので，$s \geq 29$ ならば，

$$\frac{b}{\varphi(b)} \leq \frac{3}{2}*\frac{7}{6}*\frac{17}{16}*\frac{29}{28}*\frac{31}{30}=\frac{15283}{7680} \quad , \quad \frac{\sigma(a)}{a} \geq \frac{2^9-1}{2^8}=\frac{511}{256}=\frac{15330}{7680}$$

となり矛盾する．

$r=17$，$s=23$ のとき，$a=2^e 11^k u$，$(e \geq 8$，$k \geq 1$，u：奇数，$u \nmid 11)$ となり，

$$\frac{b}{\varphi(b)} \leq \frac{3}{2}*\frac{7}{6}*\frac{17}{16}*\frac{23}{22}*\frac{29}{28}=\frac{11339}{5632} \quad , \quad \frac{\sigma(a)}{a} \geq \frac{2^9-1}{2^8}*\frac{12}{11}=\frac{1533}{704}=\frac{12264}{5632}$$

で矛盾する．

$r=17$，$s=19$ のとき，$a=2^e 3^k u$，$(e \geq 8$，$k \geq 2$，u：奇数，$u \nmid 3)$ となり，

$$\frac{b}{\varphi(b)} \leq \frac{3}{2}*\frac{7}{6}*\frac{17}{16}*\frac{19}{18}*\frac{23}{22}=\frac{52003}{25344} \quad , \quad \frac{\sigma(a)}{a} \geq \frac{2^9-1}{2^8}*\frac{3^2+3+1}{3^2}=\frac{6643}{2304}=\frac{73073}{25344}$$

で矛盾する．よって，$r=17$ は解になり得ない．

$r=13$ のとき，　$a=2^e 3^k u$，$(e \geq 6$，$k \geq 1$，u：奇数，$u \nmid 3)$ と表せるので，

$$\frac{b}{\varphi(b)} \leq \frac{3}{2}*\frac{7}{6}*\frac{13}{12}*\frac{17}{16}*\frac{19}{18}=\frac{29393}{13824} \quad , \quad \frac{\sigma(a)}{a} \geq \frac{2^7-1}{2^6}*\frac{4}{3}=\frac{127}{48}=\frac{36576}{13824}$$

となり矛盾する．よって，$r=13$ は解になり得ない．

$r=11$ のとき，$a=2^e 5^k u$，$(e \geq 5$，$k \geq 1$，u：奇数，$u \nmid 5)$ と表せるので，

$$\frac{b}{\varphi(b)} \leq \frac{3}{2}*\frac{7}{6}*\frac{11}{10}*\frac{13}{12}*\frac{17}{16}=\frac{17017}{7680} \quad , \quad \frac{\sigma(a)}{a} \geq \frac{2^6-1}{2^5}*\frac{6}{5}=\frac{189}{80}=\frac{18144}{7680}$$

となり矛盾する．よって，$r=11$ は解になり得ない，

結局，$p=3$，$q=7$ のとき b 解を構成し得る r は存在せず，q が取り得る値は 5 に限られる．したがって，b 解は $b=3*5*r*s*t$ に限られる．　　（証明終）

$b=3*5*r*s*t$ の形となる b 解の r が取り得る値は，7，11，13，17 に限られる (証明は割愛する)．

ここで，議論する範囲を限定し，$b/\varphi(b)<2$ という条件をつける．この条件下では，解になり得る r は 17 に限られる（$\because r$ が 7，11，13 の場合，必ず $b/\varphi(b)>2$ となる)．

$p=3$，$q=5$，$r=17$ のとき，$b/\varphi(b)<2$ の条件下で，解の候補になり得る s の値と，その s に応じた t の範囲は，

$$s=257, \qquad 65537 \le t \le 131071$$

$$s=409, \qquad 683 \le t \le 811$$

に限定される（証明は割愛する)．

$s=409$ のとき，解になり得る素数 t の候補は $683 \le t \le 811$ の範囲に 18 個あるが，いずれの t も $b/\varphi(b)$ と $\sigma(a)/a$ の大きさを評価した際に 矛盾が導かれ，解にならない．

$s=257$ のとき，$t=65537$ ならば，$a=2^e u$, $(e \ge 31$，u：奇数) と表せるので，

$$\frac{b}{\varphi(b)}=\frac{3}{2}*\frac{5}{4}*\frac{17}{16}*\frac{257}{256}*\frac{65537}{65536}=\frac{4294967295}{2147483648}=\frac{2^{32}-1}{2^{31}} \quad , \qquad \frac{\sigma(a)}{a}\ge\frac{2^{32}-1}{2^{31}}$$

となり，矛盾しない．不等式の等号は，$e=31$ かつ $u=1$ のとき成立する．したがって，$a=2^{31}$，$b=3*5*17*257*65537$ は式 (1) の解となる．

また，$s=257$ で，$t=131071$ ならば，$a=2^e u$, $(e \ge 16$，u：奇数) と表せるので，

$$\frac{b}{\varphi(b)}=\frac{3}{2}*\frac{5}{4}*\frac{17}{16}*\frac{257}{256}*\frac{131071}{131070}=\frac{3*5*17*257}{2*4*16*256}*\frac{131071}{2*3*5*17*257}=\frac{2^{17}-1}{2^{16}} \quad ,$$

$$\frac{\sigma(a)}{a}\ge\frac{2^{17}-1}{2^{16}}=\frac{131071}{65536}$$

となり，矛盾しない．不等式の等号は，$e=16$ かつ $u=1$ のとき成立する．したがって，$a=2^{16}$，$b=3*5*17*257*131071$ も式 (1) の解となる．

なお，$s=257$ で，$65537<t<131071$ のときは，いずれの素数 t も，$b/\varphi(b)$ と $\sigma(a)/a$ の大きさを評価した際に 矛盾が導かれる．

結局，b が素因子数 5 の奇数で，$b/\varphi(b)<2$ の場合，式 (1) の解を $(a,\ b)$ で表すと，次の 2 解に限られる．

（2^{31}，$3*5*17*257*65537$），（2^{16}，$3*5*17*257*131071$）

以上