2 変数完全数問題　$b=$ 奇数解の考察

高嶋耕司

2019 年 12 月 12 日

２変数完全数問題は，自然数 a，b がどのようなときに次の等式を満たすかという問題である．

$$\frac{\sigma(a)}{a} = \frac{b}{\varphi(b)} \tag{1}$$

ここで，$\sigma(n)$ はユークリッド関数（自然数 n のすべての約数の和），$\varphi(n)$ はオイラー関数（自然数 n 以下で n と互いに素な自然数の個数）である．

この問題の b の奇数解に制約（b が 5 以上の相異なる 2 つの素数の積のとき，等式 (1) は成り立たない）を見つけ，紹介したところ，水谷氏からエレガントな証明方法のコメントをいただいた．そこで，その方法を用いて，$b=$ 奇数解を考察する．

定理１　$b=p$　(p：奇素数) のとき，等式 (1) の b 解は 3 に限られる．

証明：　$b \geq 5$ で式 (1) が成り立つと仮定する．

$$右辺 = \frac{b}{\varphi(b)} \leq \frac{5}{4}$$

$$左辺 = \frac{\sigma(a)}{a} \geq \frac{3}{2} \qquad (\because a \text{ は偶数})$$

$$\frac{6}{4} \leq \frac{\sigma(a)}{a} = \frac{b}{\varphi(b)} \leq \frac{5}{4} \quad \text{となり矛盾する．}$$

$b=3$ のとき，

$$\frac{b}{\varphi(b)} = \frac{3}{2} \quad , \quad \frac{\sigma(a)}{a} \geq \frac{3}{2} \quad (a=2 \text{ のとき等号成立})$$

なので，$b=3$，$a=2$ が等式 (1) の解となる．（証明終）

定理 2　$b = pq$　(p, q は奇素数，$p < q$) のとき，等式 (1) の b 解は $3*5$ または $3*7$.

証明：　$p \geq 5$ で式 (1) が成り立つと仮定する．

$$\text{右辺} = \frac{b}{\varphi(b)} \leq \frac{5}{4} * \frac{7}{6} = \frac{35}{24}$$

$$\text{左辺} = \frac{\sigma(a)}{a} \geq \frac{2^3 - 1}{2^2} = \frac{7}{4} = \frac{42}{24} \quad (\because a = 2^e u,\ u：\text{奇数},\ e \geq 2)$$

となり矛盾する．よって，$p = 3$ に限られる．

$q \geq 11$ のとき，式 (1) が成立すると仮定する，

$$\text{右辺} = \frac{b}{\varphi(b)} \leq \frac{3}{2} * \frac{11}{10} = \frac{33}{20}$$

$$\text{左辺} = \frac{\sigma(a)}{a} \geq \frac{2^3 - 1}{2^2} = \frac{7}{4} = \frac{35}{20}$$

となり矛盾する．よって，b が解になる可能性は $b = 3*5$ または $3*7$ に限られる．

$b = 3*5$ のとき，

$$\frac{b}{\varphi(b)} = \frac{3}{2} * \frac{5}{4} = \frac{15}{8} \quad , \qquad a = 2^e u \quad (e \geq 3,\ u：\text{奇数})$$

$$\frac{\sigma(a)}{a} = \frac{2^{e+1} - 1}{2^e} * \frac{\sigma(u)}{u} \geq \frac{2^4 - 1}{2^3} = \frac{15}{8}$$

不等式の等号は $e = 3$，$u = 1$ のとき成立する．ゆえに a の解は 2^3.

また，$b = 3*7$ のとき，

$$\frac{b}{\varphi(b)} = \frac{3}{2} * \frac{7}{6} = \frac{7}{4} \quad , \qquad a = 2^e u \quad (e \geq 2,\ u：\text{奇数})$$

$$\frac{\sigma(a)}{a} = \frac{2^{e+1} - 1}{2^e} * \frac{\sigma(u)}{u} \geq \frac{2^3 - 1}{2^2} = \frac{7}{4}$$

不等式の等号は $e = 2$，$u = 1$ のとき成立する．ゆえに a の解は 2^2.

よって，解は，$b = 3*5$，$a = 2^3$，または，$b = 3*7$，$a = 2^2$ に限られる．

（証明終）

定理 3　$b = pqr$　$(p, q, r$ は奇素数, $p < q < r)$ のとき，等式 (1) の b 解は $3 * 5 * r$.

証明：　$p \geq 5$ で式 (1) が成り立つと仮定する.

$$右辺 = \frac{b}{\varphi(b)} \leq \frac{5}{4} * \frac{7}{6} * \frac{11}{10} = \frac{77}{48}$$

$$左辺 = \frac{\sigma(a)}{a} \geq \frac{2^4 - 1}{2^3} = \frac{15}{8} = \frac{90}{48} \quad (\because a = 2^e u, \ e \geq 3, \ u : 奇数)$$

となり矛盾する．よって，$p = 3$ に限られる.

$q \geq 11$ のとき，式 (1) が成立すると仮定する.

$$\frac{b}{\varphi(b)} \leq \frac{3}{2} * \frac{11}{10} * \frac{13}{12} = \frac{143}{80} \quad , \quad \frac{\sigma(a)}{a} \geq \frac{2^4 - 1}{2^3} = \frac{15}{8} = \frac{150}{80}$$

となり矛盾する．よって，$5 \leq q \leq 7$.

$p = 3, \ q = 7$ のとき，$r \geq 17$ ならば,

$$\frac{b}{\varphi(b)} \leq \frac{3}{2} * \frac{7}{6} * \frac{17}{16} = \frac{119}{64} \quad , \quad \frac{\sigma(a)}{a} \geq \frac{2^4 - 1}{2^3} = \frac{15}{8} = \frac{120}{64}$$

となり矛盾する．よって，解になる可能性があるのは $11 \leq r \leq 13$ に絞られる.

$p = 3, \ q = 7$ で，$r = 11$ のとき,

$$\frac{b}{\varphi(b)} = \frac{3}{2} * \frac{7}{6} * \frac{11}{10} = \frac{77}{40} = \frac{7 * 11}{2^3 * 5}$$

$$a = 2^e 5^k u \quad (e \geq 3, \ k \geq 1, \ u : 5 \text{ で割り切れない奇数})$$

$$\frac{\sigma(a)}{a} \geq \frac{2^4 - 1}{2^3} * \frac{6}{5} = \frac{15}{8} * \frac{6}{5} = \frac{9}{4} = \frac{90}{40}$$

となり矛盾する.

$p = 3, \ q = 7$ で，$r = 13$ のとき,

$$\frac{b}{\varphi(b)} = \frac{3}{2} * \frac{7}{6} * \frac{13}{12} = \frac{91}{48} = \frac{7 * 13}{2^4 * 3}$$

$$a = 2^e 3^k u \quad (e \geq 4, \ k \geq 1, \ u : 3 \text{ で割り切れない奇数})$$

$$\frac{\sigma(a)}{a} \geq \frac{2^5 - 1}{2^4} * \frac{4}{3} = \frac{31}{16} * \frac{4}{3} = \frac{124}{48}$$

となり矛盾する.

よって，$p = 3, \ q = 7$ のとき解はなく，解は $b = 3 * 5 * r$ に限られる.（証明終）

$b = 3 * 5 * r$ で $r \geq 37$ のとき，次のように矛盾が示される．

$$右辺 = \frac{b}{\varphi(b)} \leq \frac{3}{2} * \frac{5}{4} * \frac{37}{36} = \frac{185}{96}$$

$$左辺 = \frac{\sigma(a)}{a} \geq \frac{2^5 - 1}{2^4} = \frac{31}{16} = \frac{186}{96}$$

よって，b が解になる可能性のある r の範囲は，$7 \leq r \leq 31$ に絞られる．

$7 \leq r \leq 31$ の範囲で，これまでと同様の方法で解の有無を調べた結果を表 1 に示す．

表 1　$b = 3 * 5 * r$ のときの解 a

r	7	11	13	17	19	23	29	31
a	不明	$2^9 * 31$ が一解	不明	2^7	解なし	解なし	解なし	2^4

表 1 に示すように，$b = 3 * 5 * r$ のときの解は，

$$b = 3 * 5 * 11, \quad a = 2^9 * 31$$

$$b = 3 * 5 * 17, \quad a = 2^7$$

$$b = 3 * 5 * 31, \quad a = 2^4$$

の 3 通りがわかっている．

$17 \leq r \leq 31$ の範囲の解はこれらに限られる．一方，$7 \leq r \leq 13$ の範囲の解は，これ以外にあるかどうか，今のところ不明である．

以上