2 変数完全数問題

高嶋耕司

2019 年 7 月 17 日

飯高茂先生は，数論に関する市民向けの講義中，次の等式を板書された．

$$\frac{\sigma(a)}{a} = \frac{b}{\varphi(b)} \tag{1}$$

ここで，$\sigma(n)$ はユークリッド関数（自然数 n のすべての約数の和），$\varphi(n)$ はオイラー関数（自然数 n 以下で n と互いに素な自然数の個数）である．自然数 a，b がどのようなときに等式 (1) が成り立つかという問題で，後に「2 変数完全数問題」と命名された．

聴講していた筆者は式に美しさを感じた．飯高先生から「b が素数 ($\neq 2$, 3) のとき，等式は成り立たないだろう」とのコメントがあったので，まずその証明を考えた．

定理 1　等式 (1) $\sigma(a)/a = b/\varphi(b)$ は，b が素数 ($\neq 2$, 3) のとき，成り立たない．

証明：

$b =$ 奇素数（≥ 5）で，等式 (1) が成り立つと仮定する．

b が奇素数であれば，等式 (1) の右辺は $b/(b-1)$ で，奇数/偶数 の形になる．

等式 (1) が成り立つなら左辺の a は偶数で，$a = 2N(N$ は自然数$)$ とおける．

一般に，$N = 2^k * 3^l * 5^m * \cdots (k, l, m, \cdots$ は整数 $(\geq 0))$ と表せる．

このとき，$a = 2N = 2^{k+1} * 3^l * 5^m * \cdots$ となる．

自然数 x，y が互いに素なら $\sigma(x * y) = \sigma(x) * \sigma(y)$ という乗法性を利用して，

$$\text{左辺} = \frac{\sigma(a)}{a} = \frac{2^{k+2}-1}{2^{k+1}} * \frac{\frac{3^{l+1}-1}{2}}{3^l} * \frac{\frac{5^{m+1}-1}{4}}{5^m} * \cdots \geq \frac{3}{2}$$

一方，右辺 $= b/(b-1) \leq 5/4$.

$$\text{左辺} = \frac{\sigma(a)}{a} \geq \frac{3}{2} > \frac{5}{4} \geq \frac{b}{b-1} = \frac{b}{\varphi(b)} = \text{右辺}$$

で矛盾するので，$b =$ 奇素数（≥ 5）のとき，等式は成り立たない．（証明終）

次に，自然数 a，b がそれぞれ 2 以上 1000 以下の範囲で、等式 (1) の解を調べた．$\sigma(a)/a = b/\varphi(b) = c$ とおき，等式を満たす c，a，b を表 1 に示す．

表 1　$\sigma(a)/a = b/\varphi(b) = c$ を満たす c, a, b　$(2 \leq a \leq 1000,\ 2 \leq b \leq 1000)$

c		a		b	
分数表記	小数表記	値	素因数分解	値	素因数分解の型
$13/4$	3.25	360	$2^3 * 3^2 * 5$	78, 156, ...	$2^k * 3^l * 13^m$
$31/10$	3.1	240 600	$2^4 * 3 * 5$ $2^3 * 3 * 5^2$	186, 372, ...	$2^k * 3^l * 31^m$
3	3	120 672	$2^3 * 3 * 5$ $2^5 * 3 * 7$	6, 12, ...	$2^k * 3^l$
$35/12$	2.9166666...	864 936	$2^5 * 3^3$ $2^3 * 3^2 * 13$	70, 140, ...	$2^k * 5^l * 7^m$
$65/24$	2.7083333...	72	$2^3 * 3^2$	130, 260, ...	$2^k * 5^l * 13^m$
$85/32$	2.65625	384	$2^7 * 3$	170, 340, ...	$2^k * 5^l * 17^m$
$31/12$	2.5833333...	48	$2^4 * 3$	310, 620	$2^k * 5^l * 31^m$
$91/36$	2.5277777...	36	$2^2 * 3^2$	182, 364, ...	$2^k * 7^l * 13^m$
$5/2$	2.5	24	$2^3 * 3$	10, 20, ...	$2^k * 5^l$
$7/3$	2.3333333...	12 234	$2^2 * 3$ $2 * 3^2 * 13$	14, 28, ...	$2^k * 7^l$
$13/6$	2.1666666...	18	$2 * 3^2$	26, 52, ...	$2^k * 13^l$
2	2	6 28 496	$2 * 3$ $2^2 * 7$ $2^4 * 31$	2, 4, ...	2^k
$255/128$	1.9921875	128	2^7	255, 765	$3^k * 5^l * 17^m$
$31/16$	1.9375	16	2^4	465	$3^k * 5^l * 31^m$
$15/8$	1.875	8	2^3	15, 45, ...	$3^k * 5^l$
$7/4$	1.75	4	2^2	21, 63, ...	$3^k * 7^l$
$3/2$	1.5	2	2	3, 9, ...	3^k

（k, l, m は整数 ≥ 1）

表 1 から，c が整数になるのは 2 と 3 の場合があり，c が 2 未満のとき，a は 2 のべき乗の形になることが読み取れる．また，等式 (1) を満たす b は，素因数分解の型が決まれば，各素因子のべきによらないことが予想される．

定理 2　等式 (1) の右辺 $b/\varphi(b)$ は，b の素因子のべきによらない．

証明：

$b = p^k * q^l$　(p，q は相異なる素数，k，l は自然数) の場合を考える．

自然数 x，y が互いに素なら $\varphi(x * y) = \varphi(x) * \varphi(y)$ という乗法性を利用して，

$$\varphi(b) = \varphi(p^k * q^l) = \varphi(p^k) * \varphi(q^l) = p^{k-1}(p-1) * q^{l-1}(q-1)$$

$$\frac{b}{\varphi(b)} = \frac{p^k}{p^{k-1}(p-1)} * \frac{q^l}{q^{l-1}(q-1)} = \frac{p}{p-1} * \frac{q}{q-1}$$

となり，$b/\varphi(b)$ は素因子 p，q のべき k，l に依存しない．

素因子数が 2 の場合を考えたが，素因子数が増減しても同様に議論できる．

よって，$b/\varphi(b)$ は b の素因子のべきによらない．　（証明終）

定理 3　$b/\varphi(b)$ が整数になるのは 2 と 3 に限られる．

証明：

定理 2 から，$b/\varphi(b)$ は，相異なる (素数)/(素数 − 1) の積の形で表される．

換言すると $\{2, 3/2, 5/4, 7/6, \ldots\}$ の中からいくつかを選んだ積の形となる．

1 つ選んで整数になるのは 2 を選んだ場合で，$b/\varphi(b) = 2$．

2 つ選んで整数になるのは 2 と 3/2 を選んだ場合で，$b/\varphi(b) = 2 * (3/2) = 3$．

3 つ以上を選ぶと，その積は分母に素因子 2 が残り，整数にならない．

よって，$b/\varphi(b)$ の整数値は 2 と 3 に限られる．　（証明終）

$\sigma(a)/a = 2$ を満たす a は完全数，$\sigma(a)/a = 3$ を満たす a は 3 倍完全数，とそれぞれ呼ばれる．表 1 に示すように，a が 1000 以下では，完全数は 6，28，496 の 3 種類があり，3 倍完全数は 120，672 の 2 種類がある．a の範囲を 100 万以下にまで広げると，完全数に 8128$(= 2^6 * 127)$，3 倍完全数に 523776$(= 2^9 * 3 * 11 * 31)$ が新たに現れる．

$c < 2$ では，2 のべき乗の形をした a が大きくなるほど，c は 2 に近づく．$c < 2$ で式 (1) を満たす最大の a は何だろうか．現在把握している a の 2 のべき乗解を表 2 に示す．

表 2　$\sigma(a)/a = b/\varphi(b) = c$ を満たす c, a, b　$(3/2 \leq c < 2)$

c		a	b の最小値	
分数表記	小数表記	値	値	素因数分解
$\frac{4294967295}{2147483648}$	$1.99999999953\ldots$	2^{31}	4294967295	$3*5*17*257*65537$
$131071/65536$	$1.99998474121\ldots$	2^{16}	8589737985	$3*5*17*257*131071$
$65535/32768$	$1.99996948242\ldots$	2^{15}	65535	$3*5*17*257$
$255/128$	1.9921875	2^{7}	255	$3*5*17$
$31/16$	1.9375	2^{4}	465	$3*5*31$
$15/8$	1.875	2^{3}	15	$3*5$
$7/4$	1.75	2^{2}	21	$3*7$
$3/2$	1.5	2	3	3

b の解は素因子のべきによらないため，表 2 では b の最小値を示した．

$a = 2^{31}$ のとき，

$$\frac{\sigma(2^{31})}{2^{31}} = \frac{2^{32}-1}{2^{31}} = \frac{(2^{16}+1)(2^8+1)(2^4+1)(2^2+1)(2+1)(2-1)}{2^{31}}$$
$$= \frac{3*5*17*257*65537}{2^{31}} = \frac{3}{2}*\frac{5}{4}*\frac{17}{16}*\frac{257}{256}*\frac{65537}{65536} = \frac{4294967295}{\varphi(4294967295)}$$

となり，等式 (1) が成立する．b の最小値は，フェルマー数 $F_0 = 3$，$F_1 = 5$，$F_2 = 17$，$F_3 = 257$，$F_4 = 65537$ の積になっている．ここで，$F_n = 2^{2^n} + 1$ である．

$a = 2^{63}$ のときは，$F_5 = 4294967297$ が $641 * 6700417$ と素因数分解できるため，

$$\frac{\sigma(2^{63})}{2^{63}} = \frac{2^{64}-1}{2^{63}} = \frac{(2^{32}+1)(2^{16}+1)(2^8+1)(2^4+1)(2^2+1)(2+1)(2-1)}{2^{63}}$$
$$= \frac{3*5*17*257*65537*(641*6700417)}{2^{63}}$$
$$= \frac{3}{2}*\frac{5}{4}*\frac{11}{10}*\frac{17}{16}*\frac{257}{256}*\frac{641}{640}*\frac{727}{726}*\frac{17449}{17448}*\frac{65537}{65536}*\frac{6700417}{6700416}*\frac{3^3*5^2*11}{2^{13}}$$

となり，重複なく (素数)/(素数 -1) の積になるような $b/\varphi(b)$ を構成できない．

このような事情から，$c < 2$ で式 (1) を満たす最大の a は 2^{31} ではないかと考えている．

2 変数完全数問題は，見かけは簡素だが，深い内容を含むと感じている．