2 変数完全数問題　$b=$ 奇数解 (素因子数 4) の考察

髙嶋耕司

2020 年 2 月 18 日

2 変数完全数問題は，自然数 a，b がどのようなときに次の等式を満たすかという問題である．

$$\frac{\sigma(a)}{a}=\frac{b}{\varphi(b)} \tag{1}$$

ここで，$\sigma(n)$ はユークリッド関数（自然数 n のすべての約数の和），$\varphi(n)$ はオイラー関数（自然数 n 以下で n と互いに素な自然数の個数）である．

b が奇数で素因子数が 1～3 のときの b 解を定理 1～3 に示す (証明は略す)．ただし，$b/\varphi(b)$ は b の素因子のべきによらないので，簡単のため，b の素因子のべきは 1 とする．

定理 1　$b=p$　(p：奇素数) のとき，等式 (1) の b 解は 3 に限られる．

このとき，式 (1) の解は，$a=2$，$b=3$ が唯一となる．

定理 2　$b=pq$　(p，q は奇素数，$p<q$) のとき，等式 (1) の b 解は $3*5$ または $3*7$.

このとき，式 (1) の解は，$a=2^3$，$b=3*5$ と $a=2^2$，$b=3*7$ に限られる．

定理 3　$b=pqr$　(p，q，r は奇素数，$p<q<r$) のとき，等式 (1) の b 解は $3*5*r$.

このとき，式 (1) の解を $(a,\ b)$ で表すと，次の 3 通りがわかっている．

（2^9*31，$3*5*11$），（2^7，$3*5*17$），（2^4，$3*5*31$）

$17\leq r$ の解は，2 番目と 3 番目に示した解以外にはない．一方，$7\leq r\leq 13$ の解は，1 番目に示した解以外にあるか否か，不明である．

以下は，奇数 b の素因子数が 4 の場合を議論する．

定理 4　$\underline{b = pqrs \quad (p, q, r, s \text{ は奇素数}, p < q < r < s) \text{ のとき，等式 (1) の } b \text{ 解は}}$ $\underline{3 * 5 * r * s \text{ に限られる．}}$

証明：　$p \geq 5$ で式 (1) が成り立つと仮定する．

$$\text{右辺} = \frac{b}{\varphi(b)} \leq \frac{5}{4} * \frac{7}{6} * \frac{11}{10} * \frac{13}{12} = \frac{1001}{576}$$

$$a = 2^e u \quad (e \geq 4,\ u : \text{奇数})$$

$$\text{左辺} = \frac{\sigma(a)}{a} \geq \frac{2^5 - 1}{2^4} = \frac{31}{16} = \frac{1116}{576}$$

となり矛盾する．よって，$p = 3$ に限られる．

$p = 3$，$q \geq 11$ のとき，式 (1) が成立すると仮定する．

$$\frac{b}{\varphi(b)} \leq \frac{3}{2} * \frac{11}{10} * \frac{13}{12} * \frac{17}{16} = \frac{2431}{1280} \qquad , \qquad \frac{\sigma(a)}{a} \geq \frac{2^5 - 1}{2^4} = \frac{31}{16} = \frac{2480}{1280}$$

となり矛盾する．よって，$5 \leq q \leq 7$.

$p = 3$，$q = 7$ のとき，$r \geq 19$ ならば，

$$\frac{b}{\varphi(b)} \leq \frac{3}{2} * \frac{7}{6} * \frac{19}{18} * \frac{23}{22} = \frac{3059}{1584} \qquad , \qquad \frac{\sigma(a)}{a} \geq \frac{2^5 - 1}{2^4} = \frac{31}{16} = \frac{3069}{1584}$$

となり矛盾する．よって，$p = 3$，$q = 7$ のとき，b が解になる可能性があるのは $11 \leq r \leq 17$ に絞られる．

$p = 3$，$q = 7$ で，$r = 11$ のとき，

$$\frac{b}{\varphi(b)} \leq \frac{3}{2} * \frac{7}{6} * \frac{11}{10} * \frac{13}{12} = \frac{1001}{480}$$

$$a = 2^e 5^k u \quad (e \geq 4,\ k \geq 1,\ u : \text{奇数},\ u \nmid 5)$$

$$\frac{\sigma(a)}{a} \geq \frac{2^5 - 1}{2^4} * \frac{6}{5} = \frac{31}{16} * \frac{6}{5} = \frac{93}{40} = \frac{1116}{480}$$

となり矛盾する．

$p=3$，$q=7$ で，$r=13$ のとき，

$$\frac{b}{\varphi(b)} \le \frac{3}{2} * \frac{7}{6} * \frac{13}{12} * \frac{17}{16} = \frac{1547}{768}$$

$$a = 2^e 3^k u \quad (e \ge 5,\ k \ge 1,\ u : \text{奇数},\ u \nmid 3)$$

$$\frac{\sigma(a)}{a} \ge \frac{2^6-1}{2^5} * \frac{4}{3} = \frac{21}{8} = \frac{2016}{768}$$

となり矛盾する．

$p=3$，$q=7$ で，$r=17$ のとき，

$$\frac{b}{\varphi(b)} \le \frac{3}{2} * \frac{7}{6} * \frac{17}{16} * \frac{19}{18} = \frac{2261}{1152}$$

$$a = 2^e u \quad (e \ge 7,\ u : \text{奇数})$$

$$\frac{\sigma(a)}{a} \ge \frac{2^8-1}{2^7} = \frac{255}{128} = \frac{2295}{1152}$$

となり矛盾する．

よって，$p=3$，$q=7$ のとき b 解を構成し得る r は存在せず，q が取り得る値は 5 に限られる．したがって，b 解は $b=3*5*r*s$ に限られる．（証明終）

$b=3*5*r*s$ の形となる b 解の r が取り得る値を調べる．r ≥ 41 のとき，

$$\frac{b}{\varphi(b)} \le \frac{3}{2} * \frac{5}{4} * \frac{41}{40} * \frac{43}{42} = \frac{1763}{896}$$

$$a = 2^e u \quad (e \ge 5,\ u : \text{奇数})$$

$$\frac{\sigma(a)}{a} \ge \frac{2^6-1}{2^5} = \frac{63}{32} = \frac{1764}{896}$$

となり矛盾する．よって，r の取り得る値の範囲は $7 \le r \le 37$ となる．詳細は割愛するが，同様の考察を続けると，r の取り得る値は 7，11，13，17 に限られる．式 (1) の解を (a, b) で表すと，現在，次の 2 解がわかっている．

$(2^{10}*23,\ 3*5*11*89)$，$(2^{15},\ 3*5*17*257)$

ここで，議論する範囲を限定し，$b/\varphi(b) < 2$ の場合という条件をつける．この条件の下では，解になり得る r は 17 のみである（$\because r$ が 7，11，13 の場合，必ず $b/\varphi(b) > 2$ となる）．

$p=3$，$q=5$，$r=17$ のとき，

$$\frac{b}{\varphi(b)}=\frac{3}{2}*\frac{5}{4}*\frac{17}{16}*\frac{s}{s-1}<2$$

$$255s<256(s-1)$$

$$\therefore \quad s>256$$

$$a=2^e u \qquad (e\geq 8,\ u: \text{奇数})$$

$$\frac{\sigma(a)}{a}=\frac{3}{2}*\frac{5}{4}*\frac{17}{16}*\frac{s}{s-1}\geq\frac{2^9-1}{2^8}=\frac{511}{256}$$

$$510s\geq 511(s-1)$$

$$\therefore \quad s\leq 511$$

よって，s の取り得る値は $256<s\leq 511$ にある．この範囲に素数は 43 個あるが，解になる得るのは，$s=257$ に限られる（$\because$ $s=257$ 以外では，$\sigma(a)/a>b/\varphi(b)$ となる）．

$s=257$ のとき，

$$\frac{b}{\varphi(b)}=\frac{3}{2}*\frac{5}{4}*\frac{17}{16}*\frac{257}{256}=\frac{65535}{32768}$$

$$a=2^e u \qquad (e\geq 15,\ u: \text{奇数})$$

$$\frac{\sigma(a)}{a}\geq\frac{2^{16}-1}{2^{15}}=\frac{65535}{32768}$$

となり，最後の不等式の等号は，$e=15$ かつ $u=1$ のとき成立する．したがって，奇数 b の素因子数が 4 で，$b/\varphi(b)<2$ の条件下では，$a=2^{15}$，$b=3*5*17*257$（このとき $b/\varphi(b)=65535/32768=1.999969482421875$）が式 (1) の唯一の解となる．

なお，$b/\varphi(b)\geq 2$ の条件下では，$a=2^{10}*23$，$b=3*5*11*89$（このとき $b/\varphi(b)=14685/7040=2.0859375$）以外に式 (1) の解があるか否は，不明である．

以上