数１５３の不思議な性質

飯高 茂

2024 年 11 月 2 日

Web 上の百科事典 wikipedia では 題が 153 の項目において いろいろなことが書かれていて興味深い. しかも 英語版と日本語版ではかなり異なる叙述なので両者を読み比べるが必要がある.

まず $1^3+5^3+3^3=(1+125+27=)153$ に注目する. さらに次のように考察を深める.

簡単のため 3 桁の数 $n=100a+10b+c(a,b,c$ は 0,9 の間) をとり関数を $F_3(n)=a^3+b^3+c^3$ とおく.

数 n が 3 の倍数なら, 係数の和 $a+b+c$ は 3 の倍数 (九去法の変種三去法による).

a^3-a, b^3-b, c^3-c はフェルマーの小定理によってそれぞれが 3 の倍数.

ゆえに $a^3-a+b^3-b+c^3-c=F_3(n)-n$ が 3 の倍数. したがって $F_3(n)=a^3+b^3+c^3$ も 3 の倍数.

そこで, 数 n が 3 の倍数のとき, 10 進数の表記を行いその係数の和 $N=$ を求める. N の各桁の係数の立方の和 n' は 3 の倍数になる. $n7=153$ なら終了.

153 で無ければ繰り返す. このプロセスを繰り返すと, いつかは 153 になり終了する. (153 は $F_3(n)$ の不動点).

コンピュータで実験すると有限回の後 153 に至ることは確かである.

証明をしたいが出来ていない. たとえば $n=84$ からはじめると, 576,684,792,1080, となりついには 153 になる.

153 に至るまでさらに長いのがないか, と ZOOM semi (数学大好き) で問いかけたところ U さんから

１２５８５だと１４回目に１５３, １８８８５だと１３回目に１５３になるとの報告があり大変驚いた. 今の所世界最長の長さは１４です.

数学者 山村さんによると １５以上の長さの場合もあるだろうとのこと.

フェルマーの小定理や九去法が関連するのが数学的には面白い.

問題 3 の倍数ではなく 3 で割ったら 1 余る数, 3 で割ったら余る数 に対して類似の結果が出ている,

これを一般化して, $g>1$ について g 進数で考える. 条件 $g\equiv 1 \bmod p$, を満たす. n を g 進展開し, その係数 a_0,a_1,$\cdots a_r$ とするとき, $F_p(n)=\sum_{j=0}^r a_j{}^p$ とおく.

p の倍数 n からはじめて $m_1=F_p(n), m_2=F_p(m_1), \cdots$.

こうしてできた数列はそのうち巡回するだろう. しかし, 巡回の輪が 1 つの数からなるときが不動点となる.

次の場合に研究してみよう.

- $p=3$ で 4 進法,(9 が不動点)
- $p=5$ で 6 進法,(4635, 1785, 520, 1120, 4150, 1270, 7275) はサイクル.
- $p=7$ で 8 進法,