$A+B\sqrt{2}$の無理数の連分数展開

CONTINUED FRACTIONS OF IRRATIONAL NUMBERS $A+B\sqrt{2}$

学習院大学 理学部 数学科

鶴見 圭史

by K.Tsurumi

◇◆目的◆◇

無理数 α の連分数展開とは、無理数 α に対し $N_1 = [\alpha]$ とおく

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha - N_1} \quad , \quad N_2 = [\alpha_1]$$
$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - N_2} \quad , \quad \cdots\cdots$$

とする。

$$\alpha - N_1 = \frac{1}{\alpha_1}$$
$$\alpha = N_1 + \frac{1}{\alpha_1}$$
$$\alpha_1 = N_2 + \frac{1}{\alpha_2}$$
$$\vdots$$

すると、

$$\alpha = N_1 + \cfrac{1}{N_2 + \cfrac{1}{N_3 + \cfrac{1}{\vdots}}}$$

のように無限に続く分数とかける。これを（正規）連分数 (continued fraction) という。

α が二次無理数のとき $[N_1, N_2, N_3, \ldots]$ は必ずあるところから、繰り返しがおきることが知られている。
繰り返す部分を**循環節**といい、その長さを**周期**という。繰り返しにいくまでのところを**ひげ**という。

正の有理数a, bについて、$\alpha = a + b\sqrt{2}$に関してひげの長さと循環節の周期について研究する。

◇◆方法◆◇

2次無理数αに対して、連分数展開をすると、途中から循環する部分があるので、これを求める。
a, bを有理数とするとき、$\alpha = a + b\sqrt{2}$を整数の組$[A, B, C]$で表示するため、a, bの分母を共通のCにして、

$\alpha = \dfrac{A}{C}, \alpha = \dfrac{B}{C}$とおくと、

$\alpha = \dfrac{A + B\sqrt{2}}{C}$となる。

この形を用いてαの連分数展開をする。

例) $A=0, B=3, C=2$とすると、$[\alpha]=2$になり、

$$\alpha_1 = \frac{1}{\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-2} = 3\sqrt{2}+4$$となるので、

$[\alpha_1]=8$になり、

$$\alpha_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}+4-8} = \frac{3\sqrt{2}+4}{2}$$となる。

$[\alpha_2]=4$で、

$$\alpha_3 = \frac{1}{\dfrac{3\sqrt{2}+4}{2}-4} = 3\sqrt{2}+4$$なので、

$$\alpha_3 = \alpha_1$$

よって、$2, 8, 4, 8, 4, 8, 4, \cdots$ となり、以下循環する。
このときの連分数展開の循環節は$[8, 4]$になる。

◇◆結果◆◇

・$A = 0, B = 1 \sim 50, C = 2 \sim 7$ の範囲で計算してみました。

周期１の場合

TABLE 1. ひげの長さ１、周期１

α	[A,B,C]	N	α	[A,B,C]	N	α	[A,B,C]	N	α	[A,B,C]	N
0	[0, 4, 4]	1	0	[0, 5, 5]	1	0	[0, 6, 6]	1	0	[0, 7, 7]	1
1	[1, 1, 1]	**2**	1	[1, 1, 1]	**2**	1	[1, 1, 1]	**2**	1	[1, 1, 1]	**2**
2	[1, 1, 1]		2	[1, 1, 1]		2	[1, 1, 1]		2	[1, 1, 1]	
0	[0, 20, 4]	7	0	[0, 25, 5]	7	0	[0, 30, 6]	7	0	[0, 35, 7]	7
1	[7, 5, 1]	**14**	1	[7, 5, 1]	**14**	1	[7, 5, 1]	**14**	1	[7, 5, 1]	**14**
2	[7, 5, 1]		2	[7, 5, 1]		2	[7, 5, 1]		2	[7, 5, 1]	

周期２の場合　（一部）

Table 2. ひげの長さ１、周期２　（一部）

α	[A,B,C]	N	α	[A,B,C]	N	α	[A,B,C]	N
0	[0, 3, 2]	2	0	[0, 6, 3]	2	0	[0, 3, 4]	1
1	[4, 3, 1]	**8**	1	[1, 1, 2]	**1**	1	[8, 6, 1]	**16**
2	[4, 3, 2]	**4**	2	[2, 2, 1]	**4**	2	[4, 3, 4]	**2**
3	[4, 3, 1]		3	[1, 1, 2]		3	[8, 6, 1]	
0	[0, 4, 2]	2	0	[0, 9, 3]	4	0	[0, 6, 4]	2
1	[1, 1, 2]	**1**	1	[4, 3, 2]	**4**	1	[4, 3, 1]	**8**
2	[2, 2, 1]	**4**	2	[4, 3, 1]	**8**	2	[4, 3, 2]	**4**
3	[1, 1, 2]		3	[4, 3, 2]		3	[4, 3, 1]	

◇◆考察◆◇

周期１の連分数の決定

周期 1 より $\alpha_1 = \alpha_2$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - N_2}$$

$N_2 = x$ とおく。

$$\alpha_1^2 - x\alpha_1 - 1 = 0$$

α_1 についての二次方程式を解く。

$D = x^2 + 4 = 2y^2$ とおく。$(y \in \mathbf{N})$

$$\alpha_1 = \frac{x + y\sqrt{2}}{2}$$

$x^2 = 2y^2 - 4 \cdots\cdots$ ①

$x = 2A$ とおき、①に代入する。

$y^2 = 2A^2 + 2 \cdots\cdots$ ②

$y = 2B$ とおき、②に代入する。

$-1 = A^2 - 2B^2$

ところで、$n^2-2m^2=-1$をみたす、n,mは次のように求められることが知られている。

(1) $n=1,m=1$ は解。

$(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=-1$なので3乗する。

(2) $(1-\sqrt{2})^3(1+\sqrt{2})^3=-1$

$(-\sqrt{2})^3=7-5\sqrt{2}$なので、

(3) 次に5乗すると、

$$(1-\sqrt{2})^5=(1-\sqrt{2})^2(1-\sqrt{2})^3$$
$$=41-29\sqrt{2}$$

よって、 $A=1, B=1$ のとき、 $x=2$, $y=2$ となり、

$N_2=2$, $\alpha_1=1+\sqrt{2}$

$A=7, B=5$ のとき、$x=14$,$y=10$となり、

$N_2=14$, $\alpha_1=7+5\sqrt{2}$

$A=41, B=29$ のとき、$x=82$,$y=58$となり、

$N_2=82$, $\alpha_1=41+29\sqrt{2}$

Table 3. 表

A	B	y $(y = 2B)$	x $(x = 2A)$	N_2 $(N_2 = x)$	α_1 $\left(\alpha_1 = \frac{N_2 + y\sqrt{2}}{2}\right)$
1	1	2	2	2	$1 + \sqrt{2}$
7	5	10	14	14	$7 + 5\sqrt{2}$
41	29	58	82	82	$41 + 29\sqrt{2}$

周期２の連分数の決定

周期 2 より $\alpha_1 = \alpha_3$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - N_2}$$

$$N_3\alpha_1^2 - N_2N_3\alpha_1 - N_2 = 0$$

α_1 についての二次方程式を解く。

$$D = N_2^2N_3^2 + 4N_2N_3 \cdots\cdots ②$$

$$= 2M^2$$ とおく。$(y \in \mathbf{N})$

$N_2N_3 = Z$ とおき、②に代入する。

$$(Z+2)^2 = 2(M^2+2) \cdots\cdots ③$$

$U=Z+2$ とおき、③に代入する。

$U^2=2(M^2+2)\cdots\cdots$ ④

$U=2V$ とおき、④に代入する。

$M^2=2V^2-2\cdots\cdots$ ⑤

$M=2K$ とおき、⑤に代入する。

$1=V^2-2K^2$

$=(V-\sqrt{2}K)(V+\sqrt{2}K)$

$A=3-2\sqrt{2}$, $\bar{A}=3+2\sqrt{2}$ とおく、

$A\bar{A}=(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})$

$=1$

よって、 $V = 3$, $K = 2$

$M = 4$, $U = 6$

$Z = 4$, $N_2 N_3 = 4$

また、 N_2 , N_3 は異なる自然数。

したがって、$N_2 = 1, N_3 = 4$のとき、$\alpha_1 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$

$N_2 = 4, N_3 = 1$のとき、$\alpha_1 = 2 + 2\sqrt{2}$

Table 4. 表

V	K	M $(M = 2K)$	U $(U = 2V)$	Z $(Z = U - 2)$ $= N_2N_3$	N_2	N_3	α_1 $\left(\alpha_1 = \dfrac{Z + M\sqrt{2}}{2N_3}\right)$
3	2	4	6	4	1	4	$\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$
3	2	4	6	4	4	1	$2+2\sqrt{2}$

$$A = 3 - 2\sqrt{2} \quad , \quad \bar{A} = 3 + 2\sqrt{2}$$ より、

$$A^2 = 17 - 12\sqrt{2} \quad , \quad \bar{A}^2 = 17 + 12\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} A^2\bar{A}^2 &= 289 - 288 \\ &= 1 \end{aligned}$$

よって、 $V = 17$, $K = 12$

$M = 24$, $U = 34$

$Z = 32$, $N_2 N_3 = 32$

また、 N_2 , N_3 は異なる自然数。

したがって、$N_2 = 1, N_3 = 32$ のとき、$\alpha_1 = \dfrac{4 + 3\sqrt{2}}{8}$

$N_2 = 32, N_3 = 1$ のとき、$\alpha_1 = 16 + 12\sqrt{2}$

Table 5. 表

V	K	M $(M = 2K)$	U $(U = 2V)$	Z $(Z = U - 2)$ $= N_2N_3$	N_2	N_3	α_1 $\left(\alpha_1 = \frac{Z + M\sqrt{2}}{2N_3}\right)$
17	12	24	34	32	1	32	$\frac{4+3\sqrt{2}}{8}$
17	12	24	34	32	32	1	$16+12\sqrt{2}$

Table 6. 表

V	K	M $(M = 2K)$	U $(U = 2V)$	Z $(Z = U - 2) = N_2N_3$	N_2	N_3	α_1 $\left(\alpha_1 = \dfrac{Z + M\sqrt{2}}{2N_3}\right)$
17	12	24	34	32	2	16	$\dfrac{4+3\sqrt{2}}{4}$
17	12	24	34	32	16	2	$8+6\sqrt{2}$

Table 7. 表

V	K	M $(M = 2K)$	U $(U = 2V)$	Z $(Z = U - 2) = N_2N_3$	N_2	N_3	α_1 $\left(\alpha_1 = \dfrac{Z + M\sqrt{2}}{2N_3}\right)$
17	12	24	34	32	4	8	$\dfrac{4 + 3\sqrt{2}}{2}$
17	12	24	34	32	8	4	$4 + 3\sqrt{2}$