0cm

究極の完全数と超完全数

飯高 茂

自然数 a についてその約数の和を $\sigma(a)$ であらわす
素数 P と整数 m に対して

定義 1. $r = P^{f+1} - P + 1 + m$ が素数のとき $\alpha = P^f r$ を底 P 平行移動 m の狭義の 超完全数という.

α はユークリッド完全数の一般化である.

$W = P^{f+1} - 1$ とおくと $\overline{P}\sigma(\alpha) = W(r+1) = Wr + W$
$Wr = P\alpha - r$ によって

$$\overline{P}\sigma(\alpha) = Wr + W = P\alpha - r + W.$$

$r = m + P^{f+1} - P + 1 = m + W - P + 2$ より

$$\overline{P}\sigma(\alpha) = P\alpha + P - 2 - m.$$

解 α を底が素数 P , 平行移動 m の広義の超完全数(hyper perfect numbers) という.

0.1. 計算例.

底 $P=3$ のとき方程式は
$$2\sigma(a)=3a+1-m.$$

TABLE 1. $P=3, m=0$,Hyper perfect numbers

f 指数	a	factor
1	21	$3*7$
3	2133	3^3*79
4	19521	3^4*241
5	176661	3^5*727
8	129127041	$3^8*19681$
21	328256967373616371221	$3^{21}*31381059607$

解は $3^e q$ の形で正規形(A 型解). これに限るか?

TABLE 2. $P = 3, m = 2$; Hyper perfect numbers

a	factor
9	3^2
27	3^3
81	3^4
243	3^5
729	3^6
2187	3^7
6561	3^8
19683	3^9
59049	3^{10}
177147	3^{11}

解は 3^e に限るか? C 型解という.

TABLE 3. $P = 3, m = 4$; Hyper perfect numbers

a	factor
5	5
33	$3 * 11$
261	$3^2 * 29$
385	$5 * 7 * 11$
897	$3 * 13 * 23$
2241	$3^3 * 83$
26937	$3^2 * 41 * 73$
46593	$3^2 * 31 * 167$

解は $3^e q$ の形で正規形. $3^e rq$ の形で第2正規形(D 型解).
異形の解 $a = 385 = 5 * 7 * 11$
これに限るか?

$m = -4$ なら $a = 25929 = 3^2 * 43 * 67$
$m = -3$ なら none
$m = -1$ なら $a = 4$

TABLE 4. $P = 3, m = -2$; Hyper perfect numbers

a	factor
15	$3 * 5$
207	$3^2 * 23$
1023	$3 * 11 * 31$
2975	$5^2 * 7 * 17$
19359	$3^4 * 239$
147455	$5 * 7 * 11 * 383$
1207359	$3^3 * 97 * 461$

0.2. **先行研究.** 1970 年に Minoli and Bear は自然数 k に関して, $k\sigma(\alpha) = (k+1)\alpha + (k-1) = 0$ を満たすとき α を $k-$hyperperfect number と呼んだ.

本研究では $k+1 = P$ は素数であり, さらに平行移動を考えている.

1. 究極の完全数

P を素数とし,整数 m に関して $\sigma(P^e)+m$ が素数 q のとき $a=P^eq$ を m だけ平行移動した底が P の狭義の究極の完全数と呼ぶ. 次式が成り立つ.

$$\overline{P}\sigma(a)-Pa=(P-2)\mathrm{Maxp}(a)-m(P-1). \tag{1}$$

ここで $\mathrm{Maxp}(a)$ は a の最大素因子を指している.

この式を満たす a を m だけ平行移動した底が P の広義の究極の完全数と呼ぶ.

$P=2, m=0$ のときが元祖完全数.

Table 5. $P=3, m=0$ のときの究極の完全数

α	素因数分解
117	3^2*13
796797	3^6*1093
1212741	3^2*47^2*61

2. 完全数の数学的意味づけ

完全数6に注意して $m = -2 \times 6$ とおく. $\sigma(a) - 2a = -m$ の解には素数 p でかける解 $a = 6p$ がある. これを通常解, またはB型解という.

これを一般化しよう.

$\sigma(a) - 2a = -m$ についてB型解 があるとする.

定数 α があり解 $a = \alpha p$ $(p, \alpha : $互いに素$)$ があるとすると $\sigma(\alpha) = 2\alpha$ を満たす.

α は完全数.

これによって完全数の数学的意味づけがえられた.

3.　究極の完全数のＢ型解

P ,平行移動 m の究極の完全数の方程式においてＢ型解があるとする.

定理 1. 定数 α があり解 $a=\alpha p$ があると仮定する. *(*p は無数にある素数*.)*

そのとき解 α は底が素数 P の超完全数 *(hyper perfect numbers)* となる.

Proof

$$\begin{aligned}\overline{P}\sigma(a) - Pa &= \overline{P}\sigma(\alpha p) - P\alpha p \\ &= p(\overline{P}\sigma(\alpha) - P\alpha) + \overline{P}\sigma(\alpha).\end{aligned}$$

$\overline{P}\sigma(a) - Pa = (P-2)q - m\overline{P}$ を使って

$$p(\overline{P}\sigma(\alpha) - P\alpha) + \overline{P}\sigma(\alpha) = (P-2)p - m\overline{P}.$$

p でまとめると

$$p(\overline{P}\sigma(\alpha) - P\alpha - (P-2)) = -\overline{P}\sigma(\alpha) - m\overline{P}.$$

さて p の係数を 0 とおくと $\overline{P}\sigma(\alpha) - P\alpha - (P-2)$ および $\sigma(\alpha) = -m$.

B型解 があるとする.すなわち定数 α があり解 $a=\alpha p$ を満たすときα は底 P の広義の超完全数となる.

$\overline{P}\sigma(\alpha)=P\alpha+(P-2)$ の解 α は正規形$(P^e r, r:$素数$))$と仮定する. (正規形仮説)

$\alpha = P^f r(r$:素数) となるので,$W = P^{f+1}-1$ とおくと $\overline{P}\sigma(\alpha)=W(r+1), P\alpha=(W+1)r.$

$W=r+P-2$ によって, $r=W-P+2=P^{f+1}-1-P+2=P^{f+1}-P+1.$

References

[1] S.Iitaka, 数学の研究をはじめよう (I)(II)(III)(IV) 2016,2017 年 現代数学社.