

数学の研究をはじめよう —  
中編 3倍積完全数の平行移動

飯高 茂

2024年12月31日

## 1 はじめに

私にとってのパソコンは40の手習いであった。

NECのパソコンPC8001を買ってみると、数学や物理で活用するには言語Basicを使って自分でプログラムを全部作る必要があるとのことであった。

当面の目標は円周率を1000桁求めることと完全数を計算することであった。

完全数プログラムがうまく動くと6,28,496,8128が求まった。素直に感動した。

これだけでは分かっていることなので2倍ではなく3倍にして $\sigma(a) = 3a$ を求めたら120,672が求まった。

それから10年以上たってから3倍積完全数というものがあることが古くから研究されていることを知った。

完全数は無限にあると思われているが2024年現在52個だけ見つけられた。しかし3倍積完全数を調べるとわずか6個しかないらしい。

ここではそれらの素因数分解を記録する。古典的完全数は $2^e Q$ , ( $Q = 2^{e+1} - 1$ :素数)と素因数分解されることに留意したい。

表 1: 3倍積完全数を  $\sigma(a) - 3a = 0$  の解

$a$	素因数分解
120	$2^3 * 3 * 5$
672	$2^5 * 3 * 7$
523776	$2^9 * 3 * 11 * 31$
459818240	$2^8 * 5 * 7 * 19 * 37 * 73$
1476304896	$2^{13} * 3 * 11 * 43 * 127$
51001180160	$2^{14} * 5 * 7 * 19 * 31 * 151$

2べき以外は指数はすべて1で概して小さい素因子をもっている。

そこで平行移動のパラメータ  $m$  を入れて  $\sigma(a) - 3a = -m$  の解を調べてみよう。

予備知識として  $\sigma(a) - 2a = -m$  の解は  $-m = 2 * 6, 2 * 28, 2 * 496, 2 * 8128$  の場合、言い換えれば完全数  $k$  の2倍  $2k$  が  $-m$  のとき素数  $p$  について  $a = kp$  が解になり無数の解をえる。鍵がみつかりと無数の解がある。したがってこの場合  $m = -2k$  をハウスキーという。

## 2 3 倍積完全数の平行移動

一般に  $\sigma(a) = 3a$  の解は 3 倍積完全数と呼ばれる.

$\sigma(a) = 3a - m$  の解は  $m = -360, 28$  の場合は無数にありこれらはハウスキー候補になる.

表 2:  $\sigma(a) - 3a = 360$  の解

$a$	素因数分解	$B = \sigma(a)$	素因数分解
1920	$2^7 * 3 * 5$	6120	$2^3 * 3^2 * 5 * 17$
1080	$2^3 * 3^3 * 5$	3600	$2^4 * 3^2 * 5^2$
3000	$2^3 * 3 * 5^3$	9360	$2^4 * 3^2 * 5 * 13$
840	$2^3 * 3 * 5 * 7$	2880	$2^6 * 3^2 * 5$
1320	$2^3 * 3 * 5 * 11$	4320	$2^5 * 3^3 * 5$
1560	$2^3 * 3 * 5 * 13$	5040	$2^4 * 3^2 * 5 * 7$
2040	$2^3 * 3 * 5 * 17$	6480	$2^4 * 3^4 * 5$
2280	$2^3 * 3 * 5 * 19$	7200	$2^5 * 3^2 * 5^2$
2760	$2^3 * 3 * 5 * 23$	8640	$2^6 * 3^3 * 5$
3480	$2^3 * 3 * 5 * 29$	10800	$2^4 * 3^3 * 5^2$
3720	$2^3 * 3 * 5 * 31$	11520	$2^8 * 3^2 * 5$
4440	$2^3 * 3 * 5 * 37$	13680	$2^4 * 3^2 * 5 * 19$
4920	$2^3 * 3 * 5 * 41$	15120	$2^4 * 3^3 * 5 * 7$

第 2 ブロックの解は  $a = 2^3 * 3 * 5 * 41$  などである.

$a = 2^3 * 3 * 5 * p, (p > 5: \text{素数})$  とおいてみる.

$$\sigma(a) = \sigma(2^3 * 3 * 5 * p) = 15 * 4 * 6(p+1) = 360(p+1) = 3(120p+120) = 3a + 360.$$

解であることが確認された

したがって,  $m = -360$  はハウスキー.

第 1 ブロックは  $a = 1920 = 2^7 * 3 * 5, a = 1080 = 2^3 * 3^3 * 5, a = 3000 = 2^3 * 3 * 5^3$ .

これらは疑素数解

$m = 28$  の場合も興味深い.

表 3:  $\sigma(a) - 3a = -28$  の解

$a$	素因数分解	$B = \sigma(a)$	
28	$2^2 * 7$	56	$2^3 * 7$
84	$2^2 * 3 * 7$	224	$2^5 * 7$
252	$2^2 * 3^2 * 7$	728	$2^3 * 7 * 13$
756	$2^2 * 3^3 * 7$	2240	$2^6 * 5 * 7$
2268	$2^2 * 3^4 * 7$	6776	$2^3 * 7 * 11^2$
6804	$2^2 * 3^5 * 7$	20384	$2^5 * 7^2 * 13$
20412	$2^2 * 3^6 * 7$	61208	$2^3 * 7 * 1093$
61236	$2^2 * 3^7 * 7$	183680	$2^7 * 5 * 7 * 41$
183708	$2^2 * 3^8 * 7$	551096	$2^3 * 7 * 13 * 757$

これらから解は  $a = 2^2 * 7 * 3^e$ , ( $e \geq 0$ ) で書ける.

$$\sigma(a) = \sigma(2^2 * 7 * 3^e) = 7 * 4 * (3^{e+1} - 1) = 3a - 28$$

これらから  $a = 2^2 * 7$  ならば  $\sigma(a) = \sigma(2^2 * 7) = 7 * 8 = 56$ ,

$$3a - 28 = 3 * 28 - 28 = 56. \text{ ゆえに, } \sigma(a) = 3a - 28.$$

$2^2 * 7 * 3^e$  の解は B 型解ではないが C 型解とも言えるので  $m = 28$  はハウスキーまがいと考  
える.

試みに第3完全数でしてみる.

表 4:  $\sigma(a) - 3a = -496$  の解

$a$	素因数分解	$B = \sigma(a)$	
496	$2^4 * 31$	992	$2^5 * 31$
1488	$2^4 * 3 * 31$	3968	$2^7 * 31$
4464	$2^4 * 3^2 * 31$	12896	$2^5 * 13 * 31$
13392	$2^4 * 3^3 * 31$	39680	$2^8 * 5 * 31$
40176	$2^4 * 3^4 * 31$	120032	$2^5 * 11^2 * 31$
120528	$2^4 * 3^5 * 31$	361088	$2^7 * 7 * 13 * 31$
361584	$2^4 * 3^6 * 31$	1084256	$2^5 * 31 * 1093$
1084752	$2^4 * 3^7 * 31$	3253760	$2^9 * 5 * 31 * 41$

これらから解は  $a = 2^4 * 31 * 3^e, (e \geq 0)$  と書ける.

実際にこれらが次の式を満たすことを確認しよう.  $\sigma(a) - 3a = -496$

$$\sigma(a) = \sigma(2^4 * 31 * 3^e) = (2^5 - 1) * 32 * (3^{e+1} - 1) / 2 = 31 * 32 * (3^{e+1} - 1), \quad 3a = 2^4 * 31 * 3^{e+1},$$

$$\text{ゆえに } \sigma(a) - 3a = 31 * 16 * (3^{e+1} - 1) - 2^4 * 31 * 3^{e+1} = -31 * 16 - 496.$$

ここまでしてみると一般論としてやるしかない.

完全数  $k = 2^e Q$ , ( $Q = \sigma(2^e) = 2^{e+1} - 1$ : 素数)

$a = k * 3^f$  とおく.  $\sigma(a) = \sigma(k * 3^f) = 2k * (3^{f+1} - 1)/2 = k * (3^{f+1} - 1)$

$3a = k * 3^{f+1}$  なので,

$\sigma(a) = k * (3^{f+1} - 1) = 3a - k.$

$$\sigma(a) = 3a - k.$$

### 3 大いなる一般論

$m = -360 = -3 * 120$  なので思い切って 2 番目の 3 倍積完全数 672 を当て嵌め  $m = -3 * 672$  としたらこれが大当たりであった。

表 5:  $\sigma(a) - 3a = 3 * 672$  の解

$a$	素因数分解	$B = \sigma(a)$	
12720	$2^4 * 3 * 5 * 53$	40176	$2^4 * 3^4 * 31$
15288	$2^3 * 3 * 7^2 * 13$	47880	$2^3 * 3^2 * 5 * 7 * 19$
35904	$2^6 * 3 * 11 * 17$	109728	$2^5 * 3^3 * 127$
96048	$2^4 * 3^2 * 23 * 29$	290160	$2^4 * 3^2 * 5 * 13 * 31$
6048	$2^5 * 3^3 * 7$	20160	$2^6 * 3^2 * 5 * 7$
32928	$2^5 * 3 * 7^3$	100800	$2^6 * 3^2 * 5^2 * 7$
43008	$2^{11} * 3 * 7$	131040	$2^5 * 3^2 * 5 * 7 * 13$
3360	$2^5 * 3 * 5 * 7$	12096	$2^6 * 3^3 * 7$
7392	$2^5 * 3 * 7 * 11$	24192	$2^7 * 3^3 * 7$
8736	$2^5 * 3 * 7 * 13$	28224	$2^6 * 3^2 * 7^2$
11424	$2^5 * 3 * 7 * 17$	36288	$2^6 * 3^4 * 7$
12768	$2^5 * 3 * 7 * 19$	40320	$2^7 * 3^2 * 5 * 7$
15456	$2^5 * 3 * 7 * 23$	48384	$2^8 * 3^3 * 7$
19488	$2^5 * 3 * 7 * 29$	60480	$2^6 * 3^3 * 5 * 7$
20832	$2^5 * 3 * 7 * 31$	64512	$2^{10} * 3^2 * 7$
24864	$2^5 * 3 * 7 * 37$	76608	$2^6 * 3^2 * 7 * 19$
27552	$2^5 * 3 * 7 * 41$	84672	$2^6 * 3^3 * 7^2$
28896	$2^5 * 3 * 7 * 43$	88704	$2^7 * 3^2 * 7 * 11$
31584	$2^5 * 3 * 7 * 47$	96768	$2^9 * 3^3 * 7$
35616	$2^5 * 3 * 7 * 53$	108864	$2^6 * 3^5 * 7$
39648	$2^5 * 3 * 7 * 59$	120960	$2^7 * 3^3 * 5 * 7$
40992	$2^5 * 3 * 7 * 61$	124992	$2^6 * 3^2 * 7 * 31$
45024	$2^5 * 3 * 7 * 67$	137088	$2^7 * 3^2 * 7 * 17$

第3ブロックの解は  $a = 2^5 * 3 * 7 * p$ ; ( $p \neq 2, 3, 7$ : 素数) となっている.

第2ブロックの解は擬素数解.

第1ブロックの解は4つあるがこれらは真正のエイリアン解.

## 4 新しい定理

$-m$  だけ平行移動した3倍積完全数の定義式  $\sigma(a) - 3a = -m$  が定数  $K$  に対し  $a = Kp$  となる素数  $p$  が無数にあると仮定する.

$$\sigma(a) - 3a = \sigma(Kp) - 3Kp = (\sigma(K) - 3K)p + \sigma(K) = -m$$

$p$  が無数と言わないまでも複数個あるなら  $\sigma(K) - 3K = 0, \sigma(K) = 3K = -m$ .

$K$  は3倍積完全数で  $-3K$  があこがれのハウスキーであることが分かった

**定理 1**  $-m$  だけ平行移動した3倍積完全数において,  $\sigma(a) - 3a = -m$  が定数  $K$  に対し  $a = Kp$  となる素数  $p$  が無数にあるとき  $K$  は3倍積完全数で  $m = -3K$  の解として  $a = Kp$  がある.



## 5 ダブルシグマ関数

そこで ダブルシグマ関数  $\sigma^2(a)$  を使うと  $\sigma^2(a) - 3a = -m$  の解を調べるとハウスキーを与える場合が沢山ある。

$\sigma^2(a) - 3a = 18$  の解として  $a = 2p, B = 6Q$  と素数  $p, Q$  で書けて  $p = 2Q - 1$  を満たす。  
これらを 3 倍積完全数 2.0 と呼ぶことにしたいがこれは次号でのお楽しみ。