0cm

書泉グランデでの講義　**JUNE 28TH /2018**

スーパー完全数の素数の定数倍解

飯高 茂

1. 高校生のための完全数入門

高校1年生が完全数や双子素数で研究をしたいと言ってきた. $\sigma(a)$ のダタのあるエクセルのファイルを差し上げて次の結果をみてもらった.

```
a 素因数分解 素因子数  オイラ関数  \sigma(a) 1  \sigma(a)-2a
5 $[5]$ 1 4 6 1 -4
14 $[2,7]$ 2 6 24 8 -4
44 $[2^2,11]$ 2 20 84 24 -4
110 $[2,5,11]$ 3 40 216 70 -4
152 $[2^3,19]$ 2 72 300 80 -4
884 $[2^2,13,17]$ 3 384 1764 500 -4
2144 $[2^5,67]$ 2 1056 4284 1088 -4
3 $[3]$ 1 2 4 1 -2
10 $[2,5]$ 2 4 18 6 -2
136 $[2^3,17]$ 2 64 270 72 -2
2 $[2]$ 1 1 3 1 -1
4 $[2^2]$ 1 2 7 2 -1
8 $[2^3]$ 1 4 15 4 -1
16 $[2^4]$ 1 8 31 8 -1
32 $[2^5]$ 1 16 63 16 -1
64 $[2^6]$ 1 32 127 32 -1
128 $[2^7]$ 1 64 255 64 -1
```

```
6 $[2,3]$ 2 2 12 4 0
28 $[2^2,7]$ 2 12 56 16 0
496 $[2^4,31]$ 2 240 992 256 0
20 $[2^2,5]$ 2 8 42 12 2
104 $[2^3,13]$ 2 48 210 56 2
464 $[2^4,29]$ 2 224 930 240 2
650 $[2,5^2,13]$ 3 240 1302 410 2
1952 $[2^5,61]$ 2 960 3906 992 2
```

スーパー双子素数は最新の話題であるがそれを研究してそれが無限にあることを証明するのは難しい.

プログラムを作り, スーパー双子素数 $(q, p = 4q + 1)$ を実際に $(q < 10000)$ つくり, それを数える.

スーパー双子素数 $(q, p = 4q - 1)$ を実際に $(q < 10000)$ つくり, それを数え両者を比べてみよう.

2. History

wiki にはスーパー双子素数やウルトラ三つ子素数に関連した素数の例が載っている.

(1) Twin primes :$p, q = p + 2$ がともに素数.
(2) Triplet primes :$p, q = p + 2(\Gamma\Gamma\Gamma p + 4), r = p + 6$ が素数
(3) Cousin primes :$p, q = p + 4$ がともに素数
(4) Sexy primes :$p, q = p + 6$ がともに素数 (最近 2011,2017 が sexy なことが注目された)
(5) Sophie Germain primes :$p, q = 2p + 1$がともに素数
(6) Safe primes : $p, q = (p - 1)/2$ がともに素数
(7) Balanced primes :$q = p - n, p, r = p + n$ (n は偶数)

双子素数が無限にあるだろうと最初に言ったのは Paul Staeckel (1862-1919).

wiki で取り上げたどの例も素数の対や三つ子の素数の例が無限にありそうなのだがもっとも簡単そうな双子素数の場合をこめて証明ができていない. 最良の結果は $(p, p{+}2, \cdots, p{+}$

3. Dirichlet の定理

$p = aq + b$ において, $q = 2n + 1$ とおくと, $p = 2an + a + b$
高橋の条件をつける.
1.1 (i)$a + b \equiv 1 \mod 2$, (ii)a, b は互いに素
すると, $2a, a + b$ は互いに素となり次の定理が使える.
Proof
$\gcd(a, b)$ を a, b の最大公約数とする. $a - b = 1 + 2k$ とおく.

$$
\begin{aligned}
gcd(2a, a+b) &= gcd(a-b, a+b) \\
&= gcd(a-b, 2b) \\
&= gcd(a-b, 2a, 2b) \\
&= gcd(a-b, 2) \\
&= gcd(a-b, 2) \\
&= gcd(1+2k, 2) = 1.
\end{aligned}
$$

よって, $2a, a + b$ は互いに素

$p = 4n+1$ と表される素数の個数と $p = 4n-1$ と表される素数の個数はその比が極限では等しいことが知られている. スーパー双子素数ではどうだろうか. (高校生への問いかけ)

3.1. **スーパー完全数.** $a = P^e$ とおくとき, $q = \sigma(P^e) + m = \sigma(a) + m$ は素数とする.

$a = P^e$ 満たす方程式を次のようにして求める.

$\sigma(q) = q + 1$ が成り立つので,左辺は $\sigma(q) = \sigma(\sigma(a) + m)$.

右辺は $q + 1 = \dfrac{W}{\overline{P}} + m + 1$. よって, $\overline{P}$ を掛けて

$$\overline{P}(q+1) = W + (m+1)\overline{P}.$$

$$\overline{P}\sigma(\sigma(a)+m) = \overline{P}\sigma(q+1) = \overline{P}q + \overline{P}.$$

　そして

$\overline{P}q+\overline{P}=W+\overline{P}(m+1)=Pa-1+\overline{P}m+\overline{P}=Pa+\overline{P}m+P-2.$

よって,

$$\overline{P}\sigma(\sigma(a)+m)=Pa+\overline{P}m+P-2.$$

　この式を a を未知数と見て 平行移動 m のスーパー完全数の方程式といい, この解 a を 平行移動 m のスーパー完全数 (Super perfect numbers) という.

命題 1. $a = P^e$ が 平行移動 m のスーパー完全数とする．
$A = \sigma(a) + m$ は素数になる．

Proof.
$\sigma(A) = A + 1$ を導けばよい．
$N = P^{e+1} - 1$ とおくとき，

$$\begin{aligned}\overline{P}\sigma(A) &= Pa + \overline{P}m + P - 2 \\ &= N + 1 + \overline{P}m + P - 2 \\ &= N + \overline{P}m + \overline{P}\end{aligned}$$

ゆえに

$$\overline{P}\sigma(A) = N + \overline{P}m + \overline{P}.$$

よって，

$$\overline{P}\sigma(A) \geq \overline{P}(A+1) = \overline{P}A + \overline{P}.$$

$\overline{P}A = \overline{P}\sigma(a) + \overline{P}m = N + \overline{P}$

ゆえに$\overline{P}A = N + \overline{P}m$. 一方$\sigma(A) \geq A + 1$ に注意し, これに$\overline{P}$ を掛けると

$$\overline{P}\sigma(A) \geq \overline{P}A + \overline{P}.$$

左辺 は $\overline{P}\sigma(A) = N + \overline{P}m + \overline{P}$. 右辺は $\overline{P}A + \overline{P} = N + \overline{P}m + \overline{P}$. 両辺は等しい. それゆえ$\sigma(A) \geq A + 1$. $A = \sigma(a) + m$ は素数.

End

3.2. $P = 2$ の場合. $P - 2 = 0$ なので簡単になり

$$\sigma(\sigma(a) + m) = 2a + m.$$

命題 2. $a = 2^e$ が 平行移動 m のスーパー完全数とする. $A = \sigma(a) + m$ は素数になる.

逆に $A = \sigma(a) + m$ が素数になるなら $a = 2^e$ が 平行移動 m のスーパー完全数となる.

TABLE 1. 平行移動 $m=-28$ 完全数

a	$factor$
48	2^4*3
2002	$2*7*11*13$
5170	$2*5*11*47$
29056	2^7*227
133042	$2*7*13*17*43$

3.3. 平行移動 m の完全数の例. A 型解 $48=2^4*3$, $29056=2^7*227$.

Table 2. 平行移動 $m = -18$ 完全数

a	$factor$
208	$2^4 * 13$
6976	$2^6 * 109$
8415	$3^2 * 5 * 11 * 17$
31815	$3^2 * 5 * 7 * 101$
351351	$3^3 * 7 * 11 * 13^2$

TABLE 3. 平行移動 $m = -14$ 完全数

a	$factor$
272	$2^4 * 17$
7232	$2^6 * 113$
30848	$2^7 * 241$

4. $m = -28$ の スーパー完全数

TABLE 4. $m = -28$ スーパー完全数

a	$factor$	q, quasiMersenne	$factor$	a/7
16	2^4	3	3	2.285714286
26	$2 * 13$	23	23	3.714285714
35	$5 * 7$	41	41	5
77	$7 * 11$	125	5^3	11
98	$2 * 7^2$	167	167	14
107	107	185	$5 * 37$	15.28571429
119	$7 * 17$	209	$11 * 19$	17
128	2^7	227	227	18.28571429
161	$7 * 23$	293	293	23
203	$7 * 29$	377	$13 * 29$	29
329	$7 * 47$	629	$17 * 37$	47
371	$7 * 53$	713	$23 * 31$	53
413	$7 * 59$	797	797	59

Table 5. $m = -28$ スーパー完全数

a	$factor$	q, quasiMersenne	$factor$	a/7
497	$7 * 71$	965	$5 * 193$	71
623	$7 * 89$	1217	1217	89
707	$7 * 101$	1385	$5 * 277$	101
917	$7 * 131$	1805	$5 * 19^2$	131
959	$7 * 137$	1889	1889	137
1043	$7 * 149$	2057	$11^2 * 17$	149
1253	$7 * 179$	2477	2477	179
1379	$7 * 197$	2729	2729	197
1589	$7 * 227$	3149	$47 * 67$	227
1631	$7 * 233$	3233	$53 * 61$	233
1799	$7 * 257$	3569	$43 * 83$	257
6491	6491	12953	12953	927.2857143
29339	29339	58649	$223 * 263\Gamma$	4191.285714

解を分類すると,

i. 2^e 正規解 $2^4(q=3), 2^7(q=227)$

ii. $7p($ p: 素数) 解

iii. 素数解は 107(lonly wolf) 以外にあるか

iv. $2*13, 2*7^2$ 偶数解

Table 6. $m=-28$ 完全数

a	$factor$
48	2^4*3
2002	$2*7*11*13$
5170	$2*5*11*47$
29056	2^7*227
133042	$2*7*13*17*43$

4.1. 2^e 正規解.

4.2. **素数解.** 一般に スーパー完全数 $A = \sigma(a) + m, \sigma(A) - m = 2a$ について $a = p$: 素数の解があるとする.

$A = \sigma(a) + m = p + 1 + m$ なので, $p = A - m - 1$.

$$\sigma(A) = m + 2a = m + 2(A - m - 1) = 2A - m - 2.$$

$m = -28$ のとき $\sigma(A) = 2A + 26$.

そこで 平行移動 -26 の解 A について, $A - m - 1 = A + 27$ が素数 p なら これが解.

Table 7. $m = -26$ 完全数

A	factor	$A + 27$	factor
80	$2^4 * 5$	107	107
1184	$2^5 * 37$	1211	$7 * 173$
6464	$2^6 * 101$	6491	6491
29312	$2^7 * 229$	29339	29339
78975	$3^5 * 5^2 * 13$	79002	$2 * 3^3 * 7 * 11 * 19$
510464	$2^9 * 997$	510491	$41 * 12451$
557192	$2^3 * 17^2 * 241$	557219	$13 * 42863$

107 6491 29939 はスーパー完全数の素数解

TABLE 8. $m = -18$ スーパー完全数

a	$factor$	q, quasiMersenne	$factor$
16	2^4	13	13
21	$3 * 7$	23	23
27	3^3	35	$5 * 7$
39	$3 * 13$	59	59
57	$3 * 19$	95	$5 * 19$
64	2^6	109	109
111	$3 * 37$	203	$7 * 29$
129	$3 * 43$	239	239
201	$3 * 67$	383	383
219	$3 * 73$	419	419
237	$3 * 79$	455	$5 * 7 * 13$
309	$3 * 103$	599	599
327	$3 * 109$	635	$5 * 127$
417	$3 * 139$	815	$5 * 163$
471	$3 * 157$	923	$13 * 71$
579	$3 * 193$	1139	$17 * 67$
669	$3 * 223$	1319	1319
831	$3 * 277$	1643	$31 * 53$
921	$3 * 307$	1823	1823
939	$3 * 313$	1859	$11 * 13^2$

素数解はないだろう

Table 9. $m = -18$ 完全数

a	$factor$
208	$2^4 * 13$
6976	$2^6 * 109$
8415	$3^2 * 5 * 11 * 17$
31815	$3^2 * 5 * 7 * 101$
351351	$3^3 * 7 * 11 * 13^2$

A 型解

$208 = 2^4 * 13, 6976 = 2^6 * 109.$

TABLE 10. $m = -14$ スーパー完全数

a	$factor$	q, quasiMersenne	$factor$
16	2^4	17	17
37	37	59	59
43	43	71	71
64	2^6	113	113
67	67	119	$7 * 17$
79	79	143	$11 * 13$
127	127	239	239
128	2^7	241	241
151	151	287	$7 * 41$
199	199	383	383
247	$13 * 19$	479	479
271	271	527	$17 * 31$
317	317	619	619
331	331	647	647
367	367	719	719
379	379	743	743
439	439	863	863
487	487	959	$7 * 137$
512	2^9	1009	1009
547	547	1079	$13 * 83$
619	619	1223	1223
631	631	1247	$29 * 43$

TABLE 11. $m = -14$ 完全数

a	$factor$
272	$2^4 * 17$
7232	$2^6 * 113$
30848	$2^7 * 241$

5. $m=-(2\mu+2)$ の スーパー完全数の解

$A=\sigma(a)+m, \sigma(A)-m=2a$ についてm $=-(2\mu+2)$(μ: 完全数) のとき,

$a=p$: 素数の解があるとする.

$A=\sigma(a)+m=p-2\mu-1$ なので, $p=A+2\mu+1$.

$$\sigma(A)=m+2a=-2\mu-2+2p.$$

一方, $p=A+2\mu+1$ により $-2\mu-2+2p=-2\mu-2+2(A+2\mu+1)=2A+2\mu$. ゆえに

$$\sigma(A)=2A+2\mu.$$

μ : 完全数なのでA についての方程式とみるとこの解には

i. 通常解(B 型)　　$A = \mu Q$, ここで Q は μ と互いに素な任意の素数.

$A = p - 2\mu - 1$ により, $\mu Q = p - 2\mu - 1$. よって, $p = 2\mu + 1 + \mu Q$. (p, Q) はスーパー双子素数.

ii. 擬素数 $\mu = 2^{\varepsilon} q$ とおくとき,　　$A = \mu q^2$ または $\mu 2^{\varepsilon+1}$. この場合は$A/\mu = q^2, 2^{\varepsilon+1}$.

iii. エイリアン　A 型解 $A = 2^e \pi$. $A = \Gamma 2^e \pi, a = 2^{e+1}$ $p = A + 2\mu + 1$ が素数なら, A はスーパー完全数の解 $A = \sigma(a) + m, \sigma(A) - m = 2a\ p = a$ からでる. $A = p - (2\mu + 1)$

iv. エイリアン　D 型解 $A = 2^f \pi_1 \pi_2$. このほかの変な解もある.

これについては数表を参照

Table 12. μ, コンピュータによる調査, $b = A + 2\mu + 1$,$\mu = 6, 28, 496, 8128$, 擬素数解

μ	$1+2\mu$	c_1	c_2	$A1 = c_1 * \mu$	$A2 = c_2\mu$	b_1	b_2
6	13	4	9	24	54	37	67
28	57	8	49	224	1372	281	1429

$\mu = 6$ のとき　37,67　が素数解

$\mu = 28$ のとき　281,1429 が素数解

$\mu = 8128$ のとき　1056641,131112679 が素数解

Table 13. A, A 型解, $b = A + 2\mu + 1$, $b = A + 2\mu + 1$,$\mu = 6$

e	A, A 型解	$factor$	$b = A + 2\mu + 1$	$factor$	
3	24	$2^3 * 3$	37	37	prime
4	304	$2^4 * 19$	317	317	prime
8	127744	$2^8 * 499$	127757	$7 * 18251$	
12	33501184	$2^{12} * 8179$	33501197	$577 * 58061$	
16	8589082624	$2^{16} * 131059$	8589082637	$1031 * 8330827$	

Table 14. A, A 型解, $b = A + 2\mu + 1$, $b = A + 2\mu + 1$,$\mu = 28$

e	A, A 型解	$factor$	$b = A + 2\mu + 1$	$factor$	
5	224	$2^5 * 7$	281	281	prime
6	4544	$2^6 * 71$	4601	$43 * 107$	
7	25472	$2^7 * 199$	25529	$7^2 * 521$	
9	495104	$2^9 * 967$	495161	495161	prime
15	2145615872	$2^{15} * 65479$	2145615929	$3463 * 619583$	
18	137424011264	$2^{18} * 524231$	137424011321	$7019 * 19578859$	
21	8795973484544	$2^{21} * 4194247$	8795973484601	$2612257 * 3367193$	

Table 15. A, A 型解, $b = A + 2\mu + 1$,$\mu = 496$

e	A, A 型解	$factor$	$b = A +$

Table 16. A, A 型解, $b = A + 2\mu + 1$,$\mu = 8128$

e	A, A 型解	$factor$	$b = A + 2\mu + 1$	$factor$	
13	1040384	$2^{13} * 127$	1056641	1056641	pri
15	1614774272	$2^{15} * 49279$	1614790529	$11 * 59 * 2488121$	
19	541232463872	$2^{19} * 1032319$	541232480129	$11 * 49202952739$	
21	8761999622144	$2^{21} * 4178047$	8761999638401	$167 * 193 * 271850071$	

D 型解の例

Table 17. $\sigma(a) - 2a = 56$ の解,28:完全数

a	factor
14552	$2^3 * 17 * 107$
9272	$2^3 * 19 * 61$
74992	$2^4 * 43 * 109$
35019968	$2^6 * 131 * 4177$
15317696	$2^6 * 137 * 1747$
6019264	$2^6 * 163 * 577$
53032832	$2^7 * 317 * 1307$
3365232128	$2^9 * 1277 * 5147$

a	factor
1764512	$2^5 * 67 * 823$
1006496	$2^5 * 71 * 443$
857312	$2^5 * 73 * 367$
458144	$2^5 * 103 * 139$
33058112	$2^6 * 131 * 3943$
12445504	$2^6 * 139 * 1399$
4041152	$2^6 * 233 * 271$
279108224	$2^7 * 263 * 8291$
148221824	$2^7 * 271 * 4273$
92407424	$2^7 * 283 * 2551$
44818304	$2^7 * 337 * 1039$
41162624	$2^7 * 353 * 911$
38943104	$2^7 * 367 * 829$
34699904	$2^7 * 419 * 647$
1274024704	$2^8 * 541 * 9199$

Table 18. $\sigma(a) - 2a = 2 * 8128$ の解,8128:完全数

a	factor
814735232	$2^7 * 257 * 24767$
115129472	$2^7 * 271 * 3319$

6. 平行移動 m の スーパー完全数

$A = \sigma(a)$ とおくとき $\sigma(A) = 2a + m$ を満たす.

解 a に素数解 p があるとする.

$A = \sigma(p) + m = p + 1 + m$ なので$\sigma(A) = \sigma(p + 1 + m) = 2p + m$. $p = A - 1 - m$ を代入し,

$$\sigma(A) = 2p + m = 2A - 2 - m.$$

これは平行移動 $2 + m$ の完全数の方程式とみる. さて一般に μ を完全数とするとき$\sigma(A) = 2A + 2\mu$ の解はよく分かっ

i. 通常解 (B 型解). $A = \mu Q(Q : \mu$ と互いに素な素数). $A = p+1+m = \mu Q$ になり, $p = \mu Q + 2\mu + 1$:素数, Q :素数. すなわち, $Q, p = \mu Q + 2\mu + 1$ はスーパー双子素数.

ii. 擬素数解, $\mu = 2^{\varepsilon} q, (q = 2^{\varepsilon+1}, q :$ 素数) のとき, $A_1 = \mu q^2$, $A_2 = \mu 2^{\varepsilon+1}$ が 2 つの擬素数解.

$b_1 = 1 + 2 * \mu + A_1, b_2 = 1 + 2 * \mu + A_1$ が素数ならよい.

不思議なことにこれらは $\mu = 6, 28, 8128$ のときのみ解になる.

7. 解 $3p$ の場合

$A=\sigma(a)+m$ とおくとき $\sigma(A)=2a+m$ を満たす解 a に素数の3倍解 $3p$ があるとする.

$A=\sigma(3p)+m=4p+4+m$ なので$\sigma(A)=\sigma(4p+4+m)=2a+m=6p+m$. $4p=A-4-m$ を代入するためにまず2倍する.

$$2\sigma(A)=12p+2m=3(A-4-m)+2m=3A-12-m.$$

ところで, 一般に $2\sigma(a)=3a+6$ の解は $a=8,2p(p>2:$ 素数$)$ なので,

$-12-m=6$ とおくとき , $m=-18$.

このとき通常解 i. $A=2Q$. ii. 擬素数解 $A=8$.

i. $A=2Q$ のとき, $A=4p-14=2Q$. これより, $Q=2p-7$. $p,Q=2p-7$ はスーパー双子素数.

ii. $A=8$ のとき, $A=4p-14=8$. これより,解は無い.

8. $a = \varpi p$

以上の議論をもとに一般化する.

$A = \sigma(a) + m$ とおくとき $\sigma(A) = 2a + m$ を満たす解 a に素数pのϖ 倍解 ϖp があるとする. $a = \varpi p$ になる.

$\sigma(a) = \sigma(\varpi p) = \sigma(\varpi)(p+1)$ なので$A = \sigma(a) + m = \sigma(\varpi)(p+1) + m$.

ゆえに, $p + 1 = \dfrac{A - m}{\sigma(\varpi)}$. 整理して

$$p = \frac{A - m - \sigma(\varpi)}{\sigma(\varpi)}.$$

$\sigma(A) = 2a + m = 2\varpi p + m$ によって,

$$\sigma(A) = 2\varpi(\frac{A - m - \sigma(\varpi)}{\sigma(\varpi)}) + m$$

を整理して

さてこれにB型解 $A = kQ(Q$:素数$)$ があるとする．ここで k は Q の倍数でない定数.

$\sigma(A) = \sigma(k)(Q+1)$ により

$$\sigma(A) = \frac{\sigma(k)}{k}A + \sigma(k).$$

および

$$\sigma(A) = \frac{2\varpi}{\sigma(\varpi)}A + \frac{Z}{\sigma(\varpi)}$$

によって, A の係数を等値して

$$\frac{\sigma(k)}{k} = \frac{2\varpi}{\sigma(\varpi)}$$

定数項の部分を参照して

$$\sigma(k) = \frac{Z}{\sigma(\varpi)}.$$

よって, $Z = \sigma(k)\sigma(\varpi)$.

スーパー完全数において $m = -28, -18, -14, -58, \cdots$ の場合は B 型解の類似として素数の定数倍解が出てきた．これはなぜかを以下で明らかにする．

8.1. $\dfrac{\sigma(k)}{k}=\dfrac{2\varpi}{\sigma(\varpi)}$**の解.** $\dfrac{\sigma(k)}{k}=\dfrac{2\varpi}{\sigma(\varpi)}$ を書き直すと,

$$\sigma(k)\sigma(\varpi)=2k\varpi.$$

ϖ を素数とすると, $\sigma(k)(\varpi+1)=2k\varpi$ を満たす　k,ϖ を求めたいが,とりあえず計算機で探索した.

Table 19. ϖ 素数

k	$\sigma(k)$	ϖ
3	4	2
2	3	3
4	7	7
16	31	31

これより,$k\neq 3$ なら $k=2^e,\sigma(k)=2^{e+1}-1$:メルセンヌ素数, $\varpi=\sigma(k)$.

$\varpi=\sigma(k)=2k-1,\ \sigma(k)(\varpi+1)=(2k-1)*2k$. 結局

$$(2k-1)(k)=(1-k)m-2k(2k-1)$$

よって, $k-1=1,3.k=2,4.$ したがって, $m=-28,-18$ が得られた.

事実 1. $\sigma(k)\sigma(\varpi) = 2k\varpi$ を満たす　k, ϖ を求めることは多分難しい.

　$\varpi = 2$ なら $3\sigma(k) = 4k$. $k = 3$ が唯一の解だろう.

Table 20. ϖ 自然数

k	$\sigma(k)$	ϖ
3	4	2
2	3	3
7	8	4
4	7	7
31	32	16
16	31	31
127	128	64
64	127	127

　ϖ が素数でないなら, $\varpi = 2^e, \sigma(k) = 2^{e+1}, k = 2^{e+1} - 1$. k はメルセンヌ素数 .

　$\sigma(\varpi) = \sigma(2^e) = k = 2^{e+1} - 1 = k, \varpi = 2^e = (k+1)/2$, によって $A = \sigma(\varpi)(p+1) + m = kp + k + m$.

　$\sigma(k) = k + 1 = \sigma(\varpi) = 2^{e+1}, \sigma(\varpi) = k$ を

$$0 = m(-2\varpi + \sigma(\varpi)) - 2\varpi\sigma(\varpi) - \sigma(k)\sigma(\varpi)$$

により

$$m = 2\varpi\sigma(\varpi) - \sigma(k)\sigma(\varpi) = -2k(k+1).$$

$A = \sigma(\varpi)(p+1) + m = kp + k + m = kp + k - 2k(k+1) = k(p+1-2(k+1)) = kQ$ により

$Q = p + 1 - 2(k+1) = p - 2k - 1$ になるが, 2 を法とすると矛盾. この場合は起きない.

8.2. **水谷さんの注意.** $\sigma(k)\sigma(\varpi)=2k\varpi$ の解は , (k,ϖ) は互いに素として, $\beta=k\varpi$ とおくと

$\sigma(k)\sigma(\varpi)=\sigma(\beta), 2k\varpi=2\beta$ より $\sigma(\beta)=2\beta$.

よってβ は完全数. これが偶数なら,オイラーの定理によって $\beta=2^{\varepsilon}\eta$. η はメルセンヌ素数.

$k\varpi=\beta=2^{\varepsilon}\eta$. (k,$\varpi$) は互いに素としたから

i). $k=2^{\varepsilon}, \varpi=\eta$.

ii). $k=\eta, \varpi=2^{\varepsilon}$

9. $m = -994$ の スーパー完全数

Table 21. $m = -994$ スーパー完全数

a primes		$q = 2a - 1 + m$		$b = a - 994$	$b/496$
6449	6449	11903	11903	5456	11
12401	12401	23807	$7 * 19 * 179$	11408	23
15377	15377	29759	29759	14384	29
27281	27281	53567	$17 * 23 * 137$	26288	53
31249	31249	61503	$3 * 13 * 19 * 83$	30256	61
36209	36209	71423	$11 * 43 * 151$	35216	71
37201	37201	73407	$3 * 24469$	36208	73
40177	40177	79359	$3 * 7 * 3779$	39184	79
45137	45137	89279	$73 * 1223$	44144	89
52081	52081	103167	$3^3 * 3821$	51088	103
55057	55057	109119	$3 * 36373$	54064	109
57041	57041	113087	$13 * 8699$	56048	113
74897	74897	148799	$7 * 29 * 733$	73904	149
a		$q = 2a - 1 + m$		$b = a - 994$	$b/496$
2097152	2^{21}	4193309	4193309	2096159	4226.127016
512	2^9	29	29	-481	-0.969758065
2093	$7 * 13 * 23$	3191	3191	1100	2.217741935
7385	$5 * 7 * 211$	13775	$5^2 * 19 * 29$	6392	12.88709677
13349	$7 * 1907$	25703	25703	12356	24.91129032

2 べきでもなく素数でも無い解はいろいろあるが, 正体不明ということになる.

Table 22. $m = -994$ A 型 完全数

a	factor
14848	$2^9 * 29$
8794006355968	$2^{21} * 4193309$

解を分類すると,

i. 2^e 正規解

ii. p(p: 素数) 解

iii. 非素数

Table 23. $m = -992$ 完全数

a	$factor$	$b = 1 + 2\mu + a$	$factor$
1488	$2^4 * 3 * 31$	2481	$3 * 827$
2480	$2^4 * 5 * 31$	3473	$23 * 151$
2892 D	$2^2 * 3 * 241$	3885	$3 * 5 * 7 * 37$
3472	$2^4 * 7 * 31$	4465	$5 * 19 * 47$
5456	$2^4 * 11 * 31$	6449	$*6449$
6104 D	$2^3 * 7 * 109$	7097	$47 * 151$
6448	$2^4 * 13 * 31$	7441	$7 * 1063$
8432	$2^4 * 17 * 31$	9425	$5^2 * 13 * 29$
9424	$2^4 * 19 * 31$	10417	$11 * 947$
11408	$2^4 * 23 * 31$	12401	$*12401$
14384	$2^4 * 29 * 31$	15377	$*15377$
15872 Q	$2^9 * 31$	16865	$5 * 3373$
18352	$2^4 * 31 * 37$	19345	$5 * 53 * 73$
20336	$2^4 * 31 * 41$	21329	$7 * 11 * 277$
21328	$2^4 * 31 * 43$	22321	$13 * 17 * 101$
23312	$2^4 * 31 * 47$	24305	$5 * 4861$
26288	$2^4 * 31 * 53$	27281	$*27281$
29264	$2^4 * 31 * 59$	30257	$79 * 383$
30256	$2^4 * 31 * 61$	31249	$*31249$

第５列で素数になる場合(* 印), スーパー完全数の素数解

Table 24. $m = -992$ 完全数

a	$factor$	$b = 1 + 2\mu + a$	$factor$
33232	$2^4 * 31 * 67$	34225	$5^2 * 37^2$
35216	$2^4 * 31 * 71$	36209	$*36209$
36208	$2^4 * 31 * 73$	37201	$*37201$
39184	$2^4 * 31 * 79$	40177	$*40177$
41168	$2^4 * 31 * 83$	42161	$7 * 19 * 317$
44144	$2^4 * 31 * 89$	45137	$*45137$
48112	$2^4 * 31 * 97$	49105	$5 * 7 * 23 * 61$
50096	$2^4 * 31 * 101$	51089	$47 * 1087$
51088	$2^4 * 31 * 103$	52081	$*52081$
53072	$2^4 * 31 * 107$	54065	$5 * 11 * 983$
54064	$2^4 * 31 * 109$	55057	$*55057$
56048	$2^4 * 31 * 113$	57041	$*57041$
62992	$2^4 * 31 * 127$	63985	$5 * 67 * 191$
64976	$2^4 * 31 * 131$	65969	$41 * 1609$
67952	$2^4 * 31 * 137$	68945	$5 * 13789$
68944	$2^4 * 31 * 139$	69937	$7 * 97 * 103$
73904	$2^4 * 31 * 149$	74897	$*74897$

10. Firoozbakht と Hasler の共著論文

Variations on Euclid's formula for perfect rumbers 2010 , J. of

● 第二正規解の探求を行う.

以後,通例の記号に戻す.

$\sigma(a) = 2a - m$ の解, $m = -2\mu, \mu$:完全数の場合に第二正規解の探求.

$a = 2^e pq,\ p, q$ は相異なる奇素数. $N = 2^{e+1} - 1, B = pq, \Delta = p + q$ を使う.

$\sigma(a) = \sigma(2^e pq) = N(B + \Delta + 1), 2a = (N + 1)B$ なので, $-m = \sigma(a) - 2a = N\Delta + N - B$.

ゆえに$-m - N = N\Delta - B$.

$p_0 = p - N, q_0 = q - N, B_0 = p_0 q_0$ とおくとき, $B_0 = B - N\Delta + N^2$ により,

$$-m - N = N\Delta - B = N^2 - B_0.$$

$D = N(N + 1) + m$ とおくとき $B_0 = D$.

$p_0 = 2L_1, q_0 = 2L_2$ と定めて, $B_0 = 4L_1L_2, D = 2*2^e*N+m$ により

簡単な場合から,考える.

$L_1 = -2^{e-1}, p_0 = 2L_1 = -2^e$ とすると, $p = N + 2L_1 = 2^{e+1} - 1 - 2^e = 2^e - 1$:素数とする. メルセンヌ素数. $q = 2L_2 + N$ なので, $-\mu = 2L_1 L_2 - 2^e N = -2^e L_2 - 2^e N = -2^e(L_2 + N)$.

$L_2 = \dfrac{Q-N}{2}$ によって, $L_2 + N = \dfrac{Q+N}{2}$.

ゆえに, $N = 2p+1$ により

$$\mu = 2^{e-1}(N+Q) = 2^{e-1}(2p+1+Q) = 2^e(p+(1+Q)/2).$$

例 $\mu = 496 = 2^4 * 31$

$2^4 * 31 = 2^e(p+(1+Q)/2)$