$\sigma(a) - 4\varphi(a) = -m$ の解について

土屋　知人

2020 年 4 月 1 日

1　その 1

最初に, 自然数 α に対し,$\Phi(\alpha) = \sigma(\alpha) - 4\varphi(\alpha)$ と定義する. このとき以下の命題が成り立つ.

命題.　方程式

$$\Phi(\alpha) = -m \qquad \text{(ただし}, m \text{ は自然数)} \tag{1}$$

の D 型解 $\alpha = 2^e p \cdot q$　($e \geq 1$,$p \neq q$ は奇素数) は,

$$(p - 2^{e+2} + 1)(q - 2^{e+2} + 1) = m - 2^{e+3} + 2^{2e+4} \tag{2}$$

を満たす.

命題.　m が偶数のとき, 自然数 k を導入して,

$$p = 2^{e+2} - 1 + 2^k, \qquad q = 2^{e+2} - 1 + m \cdot 2^{-k} - 2^{e+3-k} + 2^{2e+4-k} \tag{3}$$

と分解できる.

上記の k に値を与えて,
$k = 1$ なら　$p = 2^{e+2} + 1$,　$q = 2^{2e+3} + m \cdot 2^{-1} - 1$
$k = 2$ なら　$p = 2^{e+2} + 3$,　$q = 2^{2e+2} + 2^{e+1} + m \cdot 2^{-2} - 1$
$k = 3$ なら　$p = 2^{e+2} + 7$,　$q = 2^{2e+1} + 2^{e+2} - 2^e + m \cdot 2^{-3} - 1$
の 3 ケースが考えられる.
なお,$m = 0$ のとき, 上記の 3 ケース以外に

1. $p = 2^{e+2} - 1 + 2^e$,　$q = 2^{e+2} - 1 + 2^{e+4} - 2^3$
2. $p = 2^{e+2} - 1 + 2^{e+1}$,　$q = 2^{e+2} - 1 + 2^{e+3} - 2^2$
3. $p = 2^{e+2} - 1 + 2^{e+2}$,　$q = 2^{e+2} - 1 + 2^{e+2} - 2$

がある.

命題.　$\alpha = 2^e p \cdot q$,　($e \geq 1$,$p \neq q$ は奇素数) が,　$\Phi(\alpha) = -m$,(m は偶数) を満たすとき, 奇素数 $q + h$,($\gcd(\alpha, q + h) = 1$) に対して,$\alpha_h = 2^e p \cdot (q + h)$ は,　$\Phi(\alpha_h) = -m_h$ を満たす. 但し,$m_h = m + 2^k h$,$k = 1 or, 2 or, 3$.

表 1: e と p と q の $m=0$ 表 ($k=1:q_7$,$k=2:q_6$,$k=3:q_5$)

e	p_1	q_1	p_2	q_2	p_3	q_3	p_5	q_5	p_6	q_6	p_7	q_7
1			11	19					11	19		
2	19	71	23	43	31	29	23	43	19	71	17	127
4	79	311										
5			191	379					131	4159		

表 2: e と p と q の m 表

m	0						16					
e	p_5	q_5	p_6	q_6	p_7	q_7	p_5	q_5	p_6	q_6	p_7	q_7
1			11	19					11	23		
2	23	43	19	71	17	127						
4												
5	79	311										
m	32						48					
e	p_5	q_5	p_6	q_6	p_7	q_7	p_5	q_5	p_6	q_6	p_7	q_7
1									11	31		
2	23	19	19	79					19	83		
4	71	563	67	1061								
5	79	311										
m	56						128					
e	p_5	q_5	p_6	q_6	p_7	q_7	p_5	q_5	p_6	q_6	p_7	q_7
1					11	59						
2							23	59	19	103	17	191
4			67	1069					67	1087		
5												

2　その 2

上記と同様に,$\Phi(\alpha) = \sigma(\alpha) - 4\varphi(\alpha)$ とする. このとき, 以下の命題が成り立つ.

命題. 方程式

$$\Phi(\alpha) = -m \qquad (\text{ただし}, m \text{ は整数}) \tag{4}$$

の底 3 の解として,

$$\alpha = 3^{e-1}q \quad (e \geq 2, q \neq 3 \text{ は素数}$$
$$q = (5^2 3^{e-2} - 1 + 2m)/(7 \cdot 3^{e-2} + 1), \quad (m \neq 0)$$

をもつ.

【ただし,$m = 0$ なら,$(5^2 3^{e-2} - 1)/(7 \cdot 3^{e-2} + 1)$ が素数になるような e は見当たらない.】

命題. $\alpha = 3^{e-1}q$ $(e \geq 2$,$q \neq 3$ は素数) が (4) を満たすとき,$q_h = q + h$,$(q + h \neq 3)$ が素数ならば, $\alpha_h = 3^{e-1}q_h$ は,$\Phi(\alpha) = -m_h$ を満たす. ただし,m_h は

$$2 \cdot m_h = (q + h)(3^{e-2}7 + 1) - 3^{e-2}5^2 + 1$$

である.

例:$a = 3^3 2$,$(e = 4$,$q = 2$,$-m = 48)$ で　$h = 3$ とすると,$a = 3^3 5$,$-m_h = -48$.

表 3: $\Phi(a) = -m$ となる $a = 3^{e-1} \cdot q$ 表

e	3^{e-1}	q	$-m$	3^{e-1}	q	$-m$
2	3^1	2	> 0	3^1	$5, 7, 11, 13, 17, \sim 53$	< 0
3	3^2	2	> 0	3^2	$5, 7 \sim 19$	< 0
4	3^3	2	> 0	3^3	$5, 7$	< 0
5	3^4	2	> 0	3^3	$5, 7$	< 0
6	3^5	2	> 0	3^4	5	< 0
7	3^6	2	> 0			
8	3^7	2	> 0			
9	3^8	2	> 0			
10	3^9	2	> 0			

命題.　$\alpha = 3^{e-1}q$　($e \geq 2$,$q \neq 3$ は奇素数) が, 方程式 (4) を満たすとき, α と奇素数 r,($\gcd(\alpha, r) = 1$) との積 $\alpha_r = 3^{e-1}qr$ は,

$$2m_r = q[r(3^{e-2}7+1) - (3^{e-2}5^2 - 1)] + 3^{e-2}7 + 1 - (5^2 3^{e-2} - 1)r \tag{5}$$

が成り立つとき,$\Phi(\alpha_r) = -m_r$ を満たす. このとき,q の仮定より

$$(3^{e-1}+1)7 \cdot m_r = m[(3^{e-2}+1)r - (5^2 2^{e-2} - 1)] - 2^5 3^{e-2}(3^e - 1)$$

となる.

命題.　$\alpha = 3^{e-1}pr$,($e \geq 2$,$p \neq r \neq 3$ は奇素数) が方程式 (4) を満たすとき, 奇素数 q,($gcd(\alpha, q) = 1$) に対して, $\alpha_q = 3^{e-1}prq$ は,$\Phi(\alpha_q) = -m_q$ を満たす. ただし,$-m_q = -m \cdot q + \sigma(\alpha) + 4\varphi(\alpha)$.

命題. $\alpha = 3^{e-1}pqr$,($e \geq 2$,$p \neq q \neq r \neq 3$ は奇素数) が方程式 (4) を満たすとき, 奇素数 $q+h$, ($\gcd(\alpha, q+h) = 1$) に対して,$\alpha_h = 3^{e-1}p(q+h)r$ は,$\Phi(\alpha_h) = -m_h$ を満たす. ただし,$-m_h = -m + h(\sigma(3^{e-1}pr) + 4\varphi(3^{e-1}pr))$.

例:$\alpha = 3^2 5 \cdot 11$,$-m = -24$ ならば,$q = 79$ とすると,$\alpha_q = 3^2 5 \cdot 11 \cdot 79$,$-m_q = 0$.
例:$\alpha = 3^3 5 \cdot 13 \cdot 73$,$-m = -192$ なら,$h = 6$ とすると,$\alpha_h = 3^3 5 \cdot 13 \cdot 79$,$-m_h = -768$.

表 4: $\alpha = 3^{e-1}pr$ と m の表

	m	0	24	32	48	60	80	96	132	168	-48	-192
e	p	r	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}
2	5	7		11	13		17	19				
3	5		11			13			17	19	7	
4	5	11						13				7

表 5: $\alpha = 3^{e-1}pqr$ と m の表

	m	0	96	128	192	240	320	384	432	768	960	1728	-192
e	pr	q	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}	q_{11}
2	$5 \cdot 11$	19		23			29			43		73	
3	$5 \cdot 11$	79	83			89			97				
2	$5 \cdot 13$		17		19			23		31			11
4	$5 \cdot 13$	71			73					79			
4	$5 \cdot 17$	31										37	
4	$7 \cdot 11$	17									19		