3 項式：$n\sigma(a)+m\varphi(a)-ka$ （$m=n=1$,$k=2$ の場合) について

土屋　知人

2019 年 7 月 11 日

はじめに.

自然数 $a>1$ に対して, ユークリッド関数 $\sigma(a)$, オイラー関数 $\varphi(a)$ は,a の約数 d_i を用いて,$\sigma(a)=\sum_{d_i|a}d_i$,$a=\sum_{d_i|a}\varphi(d_i)$　（ガウスの公式)[*1] となる. さらに,

$$\sigma(d_i)\geq d_i+1, d_i-1\geq\varphi(d_i), \varphi(1)=1 \tag{1}$$

である. ただし, 等号が成り立つのは,d_i が素数に限る.

m,n,k を整数として,$\sigma(a)$,$\varphi(a)$,a の関係式　$F(a)=n\sigma(a)+m\varphi(a)-ka$ は

$$F(a)=(m+n-k)\,\varphi(a)+2n-k+(\sum_{d_i|a,d_i\neq a,d_i\neq 1}nd_i-(k-n)\,\varphi(d_i)) \tag{2}$$

と表せる.

特に,2m=2n=k のとき,$F(a)\geq n\sum_{d_i|a,d_i\neq a,d_i\neq 1}1$ で,a が合同数ならば,$F(a)>0$ となることが分かる. ここから, 次に命題が成り立つ.

命題.

$$\sigma(a)+\varphi(a)\geq 2a \tag{3}$$

ただし, 等号は a が素数のときに限る.

証明）

$k=2$,$m=1$,$n=1$ なら,$F(a)=\sigma(a)+\varphi(a)-2a$ だから,(2) より

$$\sigma(a)+\varphi(a)-2a=\sum_{d_i|a,d_i\neq a,di\neq 1}(d_i-\varphi(d_i))$$

となる. もし, a が素数でなければ,$a\neq d_i\neq 1$ となる d_i があって,$d_i-1\geq\varphi(d_i)$ であるから,

$$\sigma(a)+\varphi(a)-2a>0$$

で,a が素数ならば,

$$\sigma(a)+\varphi(a)-2a=0$$

となる. 故に,(3) 式　$\sigma(a)+\varphi(a)\geq 2a$ が成り立つ. ただし, 等号は a が素数の場合である. （おわり）

[*1] 『数学の研究をはじめよう (1)』飯高茂, 現代数学社,2016 年 5 月

系.

$$\sigma(a)+\varphi(a)=2a+\ 1 \tag{4}$$

は,$a=p^2$　（p は素数）をもつ.

$$\sigma(a)+\varphi(a)=2a+2 \tag{5}$$

は,$a=pq$ (p,q は素数) をもつ.

$$\sigma(a)+\varphi(a)=2a+3 \tag{6}$$

は,$a=2^3$ をもつ.

証明）

(4) を満たす a は, (2) より,

$$\sigma(a)\ +\varphi(a)-2a=\sum_{d_i|a,d_i\neq a,di\neq 1}(d_i-\varphi(d_i))=1$$

従って,$d_i-1\geq\varphi(d_i)$ より

$$d_i-\varphi(d_i)=1$$

となる a の真約数 d_i が一つ存在する. よって,a は 3 つの約数をもつので, 素数 p の 2 乗 (p^2) である.

同様に,a の真約数 d_i,d_j,$(d_i\neq d_j)$ に対し,

$$d_i-\varphi(d_i)\ +\ d_j-\varphi(d_j)\geq 2$$

である.

一般に,$a=p^{e_1}r^{e_2}q^{e_3}$, 素数 $p\neq q\neq r$ のとき,a の約数の個数は
$d(a)=(e_1+\ 1)(e_2+1)(e_3+\ 1)$ で与えられるから,
a が真約数を 2 つだけもつ場合 (すなわち,$2=d(a)-2$）は,$a=pq$, および $a=p^3$ の 2 通りである.

従って, 素数 $d_i=p$,$d_j=q$,$(p\neq q)$ もつなら,$a=pq$ で,a の約数は 1,p,q,$pq=a$ の場合のみとなり, これに限る. このとき,

$$\sigma(a)\ +\varphi(a)-2a=2$$

が成り立つ.

次に,$a=p^3$ (p 素数) ならば,$d_i=p$,$d_j=p^2$ で,

$$\sigma(a)\ +\varphi(a)-2a=d_i-\varphi(d_i)\ +\ d_j-\varphi(d_{\rm j}\ )=p-p+1+p^2-p^2+p=p+1$$

となる. よって

$$\sigma(a)\ +\varphi(a)-2a=3$$

となるためには,$p=2$ となる. これより,$a=2^3$ である.（おわり）

最後に.

本文の作成にあたり,「多摩毎日カルチャー」にて飯高茂先生に課題設定をはじめ, 多くのご指導ご助言を頂きました.