$\sigma(a)-4\varphi(a)=-m$ の解（半完全数）について

土屋　知人

2019 年 12 月 12 日

今年 9 月, 飯高茂先生により, 与えられた m に対して, 平行移動[1]m の半完全数の方程式[2]

$$\sigma(\alpha)-4\varphi(\alpha)=-m \tag{1}$$

が定義された.

$m=0$ のとき,A 型解 α は $\alpha=a/2$,(但し,a は完全数) となる. このとき, この α を半完全数と言う.

即ち,$\alpha=2^{e-1}(2^{e+1}-1)$,(但し,$2^{e+1}-1$ はメルセンヌ素数,$e\geq 2$) である.

$m\neq 0$ のとき,$2^{e+1}-1+m$ が素数なら,$\alpha=2^{e-1}(2^{e+1}-1+m)$ は (1) の A 型解になる.

ここで,$2^{e+1}-1$ がメルセンヌ素数ならば,$k=2^{e-1}(2^{e+1}-1)$ と任意の素数 p との積を $\alpha=kp$,$(gcd(k,p)=1)$ とすると, $\sigma(k)-4\varphi(k)=0$ であるから,

$$-m=\quad\sigma(k)+4\varphi(k) \tag{2}$$

ならば,α は方程式 (1) を満たすことがわかる.

このとき,$n=(2^{e+1}-1)(p-1)$ とすると,α は,$2^{e-1}(2^{e+1}-1+n)$ と表すことができる.

底 3 の奇数 $\alpha=3^{e-1}p_1\cdots p_s$,$(gcd(3,p_i)=1)$ が, 方程式 $\sigma(\alpha)-c\varphi(\alpha)=0$ の解になるための c の値は,

$c=2^2(1-2^{-e})\prod_{i=1}^{s}(p_i^{e_i+1}-1)/\{(p-1)\prod_{i=1}^{s}p_i^{e_i-1}\prod_{i=1}^{s}(p_i-1)\}$

によって決まる.

これから,$s=1$ なら $3>c>2$, よって,$m=0$ のとき,c の値によらず,A 型解は存在しない.$s=2$ なら $5>c>2$, 及び $s=3$ なら $6>c>2$ となる.

下表に,$\alpha=3^{e-1}\cdot p_1\cdot p_2$ と $\alpha=3^{e-1}\cdot p_1\cdot p_2\cdot p_3$,(但し,$p_i$ は相異なる奇素数,$e\geq 2$) の例を示す.

[1] 飯高茂「数学の研究をはじめよう (IV)」現代数学社　2017 年 10 月 20 日
[2] 『3 項完全数としての半完全数』飯高茂, 平成 31 年 10 月 11 日

表 1: α の表 ($\alpha = 3^{e-1} \cdot p_1 \cdot p_2$ と $\alpha = 3^{e-1} \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$, 但し $m = 0$ とき空欄)

c	m	e	α
3		2	$3 \cdot 7 \cdot 17$
3		3	$3^2 \cdot 7 \cdot 53$
3		7	$3^6 \cdot 7 \cdot 4373$
3		8	$3^7 \cdot 7 \cdot 13121$
4		2	$3 \cdot 5 \cdot 7$
4		4	$3^3 \cdot 5 \cdot 11$
3	24	2	$3 \cdot 7 \cdot 23$
3	96	2	$3 \cdot 7 \cdot 41$
3	-48	2	$3 \cdot 11 \cdot 23$
3	-48	2	$3 \cdot 5 \cdot 7$
3	-576	4	$3^3 \cdot 7 \cdot 17$
4	24	3	$3^2 \cdot 5 \cdot 11$
4	60	3	$3^2 \cdot 5 \cdot 13$
4	132	3	$3^2 \cdot 5 \cdot 17$
4	168	3	$3^2 \cdot 5 \cdot 19$
4	-48	3	$3^2 \cdot 5 \cdot 7$
3		2	$3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 29$
3		2	$3 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 19$
3		3	$3^2 \cdot 7 \cdot 89 \cdot 131$
3		3	$3^2 \cdot 11 \cdot 17 \cdot 79$
3		3	$3^2 \cdot 11 \cdot 19 \cdot 53$
3		4	$3^3 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 71$
3		4	$3^3 \cdot 7 \cdot 197 \cdot 881$
3		4	$3^3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 41$
4		2	$3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 19$
4		3	$3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 79$
4		4	$3^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17$
4		4	$3^3 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 71$
4		4	$3^3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 31$
5		4	$3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 17$
3	48	2	$3 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 67$
3	48	3	$3^2 \cdot 7 \cdot 59 \cdot 523$
3	48	4	$3^3 \cdot 7 \cdot 167 \cdot 4483$
3	96	2	$3 \cdot 7 \cdot 29 \cdot 43$
3	96	2	$3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 31$