

『方程式 $\sigma^2(a) = k \cdot a + m$ のパラメータ k と d について』

3月28日 土屋知人

一般に、整数 $a > 0$ に対して、 $\sigma^2(a) = \sigma(\sigma(a)) = \sigma(\sum_{q|a} q)$ は

$$\sigma^2(a) = k \cdot a + d$$

と書ける。そこで、 a と d 、 k の関係について2~3の場合を調べた結果を以下に記す。

しかし、今回の解析の方法では、「 $\sigma(a)$ が素数になる場合」^(注)を上手く扱うことができなかった。

(注) 飯高茂先生の発見された連立方程式にして取り扱う方法がある。

1. 方程式 $\sigma^2(a) = k \cdot a + d$ を満たす解 $a = p^e$ とパラメータ k と d の関係を調べる。

① $(p^{e+1}-1)/(p-1)$ が素数のとき

$\sigma^2(a) = (p^{e+1}-1)/(p-1) + 1$ であるから、 $\sigma^2(a) = k \cdot a + m = k \cdot p^e + d$ は、

$$k \cdot p^e + d = (p^{e+1}-1)/(p-1) + 1$$

となるから、 p について整理すると、

$$(k-1) \cdot p^{e+1} - k \cdot p^e + (d-1) \cdot p - d + 2 = 0 \quad (1)$$

を得る。これより、

イ. $k=1$ なら、 $p^e - (d-1) \cdot p + d - 2 = 0$ となり、

各 e に対して、 d と p の関係式

$$d = (p^e + p - 2)/(p-1) \quad (2)$$

を得る。

ロ. $k < > 1$ なら、 p^{e+1} の係数に注意して、因子分解できるとすると

$$(p^e - 1) \cdot ((k-1) \cdot p - (2-d)) = 0 \quad (3)$$

となるので、これを展開して、(1)式の係数と比較して、

$$k = 2 - d$$

となり、 $p = (2-d)/(k-1) = (2-d)/(1-d)$ より、

$$p = 2, \quad d = 0, \quad k = 2$$

を得る。 $p=2$ の場合は $d=0$ 、 $k=2$ と、イ.の $d=p^e$ 、 $k=1$ とは同じ結果を示す。

素数 $(p^{e+1}-1)/(p-1)$ の値

	p				
e	2	3	5	7	13
1	3				
2	7	13	31		
4	31			2801	30941
6	127	1093	19531		5229043
10			12207031		
12	8191	797161	305175781	16148168401	
16	131071				

- $(p^{e+1}-1)/(p-1)$ が素数のときの d の値 (p=2、3、5、7、13 の場合)

$$\sigma^2(a) = a+d \quad , \quad a = p^e$$

e	p				
	2	3	5	7	13
1	2				
2	2 ²	5	7		
4	2 ⁴			401	2381
6	2 ⁶	5・73	3907		5・80447
10			2441407		
12	2 ¹²	41・6481	61035157	2306881201	
16	2 ¹⁶				

- ② $(p^{e+1}-1)/(p-1)$ が素数でないとき

$(p^{e+1}-1)/(p-1)$ を p の多項式として因数分解し、その単項式の値を見ると、必ずしも素数になるとは限らない。

例として、p=2、3、5、7、13 の場合を下記に示す。

e	$(p^{e+1}-1)/(p-1)$	因子
1	(p+1)	r1
2	(p ² +p+1)	r1
3	(p+1)・(p ² +1)	r1・r2
4	(p ⁴ +p ³ +p ² +p+1)	r1
5	(p+1)・(p ² -p+1)・(p ² +p+1)	r1・r2・r3
6	(p ⁶ +p ⁵ +p ⁴ +p ³ +p ² +p+1)	r1
7	(p+1)・(p ² +1)・(p ⁴ +1)	r1・r2・r3
8	(p ² +p+1)・(p ⁶ +p ³ +1)	r1・r2
9	(p+1)・(p ⁴ +p ³ +p ² +p+1)・(p ⁴ -p ³ +p ² -p+1)	r1・r2・r3
10	(p ¹⁰ +p ⁹ +p ⁸ +p ⁷ +p ⁶ +p ⁵ +p ⁴ +p ³ +p ² +p+1)	r1
11	(p+1)・(p ² +p+1)・(p ² +1)・(p ² -p+1)・(p ⁴ -p ² +1)	r1・r2・r3・r4・r5

各 p に対する $(p^{e+1}-1)/(p-1)$ の各因子 r1、r2、r3、r4、r5 の値

p=2						p=3					
e	r1	r2	r3	r4	r5	e	r1	r2	r3	r4	r5
1	3					1	2 ²				
2	7					2	13				
3	3	5				3	2 ²	2・5			
4	31					4	11 ²				
5	3	3	7			5	2 ²	7	13		
6	127					6	1093				
7	3	5	17			7	2 ²	2・5	2・41		
8	7	2 ³ ・3 ²				8	13	2 ² ・3 ³ ・7			
9	3	31	11			9	2 ²	11 ²	61		
10	2047					10	23・3851				
11	3	7	5	3	13	11	2 ²	13	2・5	7	73

p=13					
e	r1	r2	r3	r4	r5
1	2·7				
2	3·61				
3	2·7	2·5·17			
4	30941				
5	2·7	157	3·61		
6	5229043				
7	2·7	2·5·17	2·14281		
8	3·61	2·7·13 ³ ·157			
9	2·7	30941	11·2411		
10	23·419·859·18041				
11	2·7	3·61	2·5·17	157	28393

p=5					
e	r1	r2	r3	r4	r5
1	2·3				
2	31				
3	2·3	2·13			
4	11·71				
5	2·3	3·7	31		
6	19531				
7	2·3	2·13	2·313		
8	31	2·3 ² ·5 ³ ·7			
9	2·3	11·71	521		
10	12207031				
11	2·3	31	2·13	3·7	601

p=7					
e	r1	r2	r3	r4	r5
1	2 ³				
2	3·19				
3	2 ³	2·5 ²			
4	2801				
5	2 ³	43	3·19		
6	29·4733				
7	2 ³	2·5 ²	2·1201		
8	3·19	2 ³ ·7 ³ ·43			
9	2 ³	2801	11·191		
10	1123·293459				
11	2 ³	3·19	2·5 ²	43	13·181

- $a=p^e$ で、d に (2) が成り立つとき、

$$\sigma^2(a) = k \cdot a + d = p^e \cdot p / (p-1) + (p-2) / (p-1) \quad (4)$$

となる。

$$p=2 \text{ なら、 } \sigma^2(a) = 2 \cdot a \quad (e=1, 2, 4, 6, 12, 16, 18 \dots)$$

$$p=3 \text{ なら、 } \sigma^2(a) = a \cdot 3 / 2 + 1 / 2 \quad p=5 \text{ なら、 } \sigma^2(a) = a \cdot 5 / 4 + 3 / 4$$

$$p=7 \text{ なら、 } \sigma^2(a) = a \cdot 7 / 6 + 5 / 6$$

- $a=p^e$ で、d に (2) が成り立たないとき

$$p=2 \text{ なら、 } \sigma^2(a) = 3 \cdot a \quad (e=3, e=9)$$

$p^e - p + 1$ の値

e	p			
	2	3	5	7
1				1
2	3	7	3·7	43
3	7	5 ²	11 ²	337
4	3·5	79	3 ³ ·23	5·479
5	31	241	3121	53·317
6	3 ² ·7	727	3·41·127	117643
7	127	5·19·29	78121	11·13 ² ·443
8	3·5·17	7·937	3·7·11·19·89	5·43·26813
9	7·73	19681	29·67349	40353601
10	3·11·31	137·431	3 ² ·53·59·347	149·503·3769
11	23·89	5·71·499	61·709·1129	35227·56131
12	3 ² ·5·7·13	113·4703	3·17·919·509	5·1151·2405089
13	8191	197·8093	11·110973011	17·5881·909113
14	3·43·127	7·17·40193	3·7·11161·26041	43·1973·7994237

2. 方程式 $\sigma^2(a) = k \cdot a - 1$ の解 $a = p^e \cdot q^f$ (p, q が素数) を考察する。

● $\sigma(p) = (p^{e+1} - 1) / (p - 1)$ が素数

(1) 【 $\sigma(p^e), \sigma(q^f)$ が互いに素】なら $\sigma^2(a) = \sigma^2(p^e) \cdot \sigma^2(q^f)$ となる。

方程式は

$$(k \cdot q^f - \sigma^2(q^f)) \cdot p^{e+1} - k \cdot q^f \cdot p^e - (1 + \sigma^2(q^f)) \cdot p + (1 + 2 \cdot \sigma^2(q^f)) = 0$$

となる。

(A) $(k \cdot q^f - \sigma^2(q^f)) = 0$ なら、

$$k \cdot q^f \cdot p^e + (1 + \sigma^2(q^f)) \cdot p - (1 + 2 \cdot \sigma^2(q^f)) = 0$$

となる。これを満たすのは、 $q=2$ で、

① $k=2$ $\sigma^2(2^f) = 2 \cdot 2^f$ 、ただし $f=1, 2, 4, 6, 12, 16, 18$

② $k=3$ $\sigma^2(2^f) = 3 \cdot 2^f$ 、ただし $f=3, 9$

である。下表は

$$L = k \cdot q^f \cdot p^e + (1 + \sigma^2(q^f)) \cdot p - (1 + 2 \cdot \sigma^2(q^f))$$

と置き、計算した結果である。

$L=0$ にはならないので、この範囲では、方程式を満たす a はない。

(B) $(k \cdot q^f - \sigma^2(q^f)) < > 0$ なら、

$$(k \cdot q^f - \sigma^2(q^f)) \cdot p^{e+1} - k \cdot q^f \cdot p^e - (1 + \sigma^2(q^f)) \cdot p + (1 + 2 \cdot \sigma^2(q^f)) = 0$$

ここで、

仮定： $\sigma(p) = (p^{e+1} - 1) / (p - 1)$ が素数

より、

$$k = [(p^{e+1} + p - 2) \cdot \sigma^2(q^f) + p - 1] / [(p - 1) \cdot p^e \cdot q^f]$$

となる。

これより、 k を求めると、 $q=2, f=1, k=3, p=5, e=2$ のとき、

$$a = 3 \cdot 5^2 \quad , \quad \sigma^2(a) = 3 \cdot a - 1$$

を得る。

表 $L = k \cdot q^f \cdot p^e + (1 + \sigma^2(q^f)) \cdot p - (1 + 2 \cdot \sigma^2(q^f))$

$(p^{e+1} - 1) / (p - 1)$ が素数		k=2							k=3	
		f							f	
p	e	1	2	4	6	12	16	18	3	9
3	2	42	82	322	1282	81822	1310722	5242882	242	15362
3	6	2922	5342	23382	93442	5980182	95682562	382730242	11682	747522
3	12	2125770	4251538	17006146	68024578	4353572866	69657165826	278628663298	8503074	544196610
5	2	116	228	900	3588	229380	3670020	14680068	452	28876
5	6	62516	125028	500100	2000388	128024580	2048393220	8193572868	250052	16003076
5	10	39082516	78125028	312500100	1250000388	80000024580	1280000393220	5120001572868	156250052	10000003076
5	12	976562516	1953125028	7812500100	31250000388	2000000024580	32000000393220	128000001572868	3906250052	250000003076
7	4	9630	19254	76998	307974	19709958	315358238	1261436834	38502	2463750
7	12	55365148830	110730297654	442921190598	1771684762374	113337824791558	1814205196664840	7256820786658330	221460595302	14173478088950

● 【 $\sigma(p^e)$ 、 $\sigma(q^f)$ が互いに素】でないとき

① $\sigma(q^f) = r \cdot \sigma(p^e)$ の場合

方程式 $\sigma^2(a) = k \cdot a - 1$ に $a = k \cdot p^e \cdot q^f$ を代入して、

$$k \cdot p^e \cdot q^f - 1 = \sigma(\sigma(p^e) \cdot \sigma(q^f)) = \sigma(r \cdot (\sigma(p^e))^2) = \sigma(r) \cdot [\sigma(p^e)^3 - 1] / [\sigma(p^e) - 1]$$

より、 $k = [\sigma(r) \cdot (\sigma(p^e)^3 - 1) + \sigma(p^e) - 1] / [(a/p^e) \cdot p^e \cdot q^f]$

なり、特に、 $a = 2 \cdot 5$ なら、 $\sigma^2(a) = 4 \cdot a - 1$ を得る。

● p がフェルマ素数のとき

特に $a = 23 \cdot 257$ なら $\sigma^2(a) = 3 \cdot a - 1$

q	p	a=q·p	$\sigma^2(a)$	k	d
2	65537	131074	3*40*12*332	3	84858
3	65537	196611	15*13*12*332	3	187047
5	65537	327685	7*40*12*332	3	132465
7	65537	458759	31*13*12*332	3	229275
11	65537	720907	15*40*12*332	3	227679
13	65537	851981	7*13*8*12*332	3	344409
17	65537	1114129	7*121*12*332	3	32061
19	65537	1245203	15*13*6*12*332	3	925671
23	65537	1507351	31*40*12*332	3	418107
29	65537	1900573	7*40*6*12*332	3	991401
31	65537	2031647	127*13*12*332	3	482643
37	65537	2424869	7*13*12*20*332	2	2401142
41	65537	2687017	7*40*8*12*332	3	863109
43	65537	2818091	15*13*133*332	3	156147
47	65537	3080239	63*40*12*332	3	798963
53	65537	3473461	7*364*12*332	2	3204310
59	65537	3866683	15*40*6*12*332	3	2742351
73	65537	4784201	7*13*12*38*332	2	4208270
79	65537	5177423	63*13*6*12*332	3	4045107
83	65537	5439571	15*40*8*12*332	3	2804487
89	65537	5832793	7*121*6*12*332	3	2748309
97	65537	6357089	7*13*57*12*332	3	1593741
101	65537	6619237	7*40*12*18*332	3	221649

q	p	a=q·p	$\sigma^2(a)$	k	d
2	257	514	3*13*44	3	174
3	257	771	15*4*44	3	327
5	257	1285	7*13*44	3	149
7	257	1799	31*4*44	3	59
11	257	2827	15*13*44	3	99
13	257	3341	7*4*8*44	2	3174
17	257	4369	7*40*44	2	3582
19	257	4883	15*4*6*44	3	1191
23	257	5911	31*13*44	3	-1
29	257	7453	7*13*6*44	3	1665
31	257	7967	127*4*44	2	6418
37	257	9509	7*4*20*44	2	5622
41	257	10537	7*13*8*44	3	421
43	257	11051	15*4*12*44	2	9578
47	257	12079	63*13*44	2	11878
53	257	13621	7*121*44	2	10026
59	257	15163	15*13*6*44	3	5991
73	257	18761	7*4*38*44	2	9294
79	257	20303	63*4*6*44	3	5619
83	257	21331	15*13*7*44	2	17398
89	257	22873	7*40*6*44	3	5301
97	257	24929	7*4*57*44	2	20366
101	257	25957	7*13*18*44	2	20158

q	p	a=q·p	$\sigma^2(a)$	k	d
2	17	34	3*40	3	18
5	17	85	7*40	3	25
7	17	119	31*13	3	46
11	17	187	15*40	3	39
13	17	221	15*40	2	158
19	17	323	15*13*6	3	201
23	17	391	31*40	3	67
29	17	493	7*40*6	3	201
31	17	527	127*13	3	70
37	17	629	7*13*20	2	562
41	17	697	7*40*8	3	149
43	17	731	15*13*12	3	147
47	17	799	63*40	3	123
53	17	901	7*364	2	746
59	17	1003	15*40*6	3	591
73	17	1241	7*13*38	2	976
79	17	1343	63*13*6	3	885
83	17	1411	15*40*8	3	567
89	17	1513	7*121*6	3	543
97	17	1649	7*13*57	3	240
101	17	1717	7*40*18	2	1606

q	p	a=q·p	$\sigma^2(a)$	k	d
2	5	10	3*13	4	-1
3	5	15	15*4	4	0
7	5	35	31*4	3	19
11	5	55	15*13	3	30
13	5	65	7*4*8	3	29
17	5	85	7*40	3	25
19	5	95	15*4*6	3	75
23	5	115	31*13	3	58
29	5	145	7*13*6	3	111
31	5	155	127*4	3	43
37	5	185	7*4*20	3	5
41	5	205	7*13*8	3	113
43	5	215	15*4*13	3	135
47	5	235	63*13	3	114
53	5	265	7*121	3	52
59	5	295	15*13*6	3	285
73	5	365	7*4*38	2	334
79	5	395	63*4*6	3	327
83	5	415	15*13*8	3	315
89	5	445	7*40*6	3	345
97	5	485	7*4*57	3	141
101	5	505	7*13*18	3	123

● $p^e \cdot q^f$ (p, q : 素数)

特に、 $a=5^2 \cdot 3$ なら、 $\sigma^2(a)=3 \cdot a$

$(p^{e+1}-1)/(p-1)$ が素数			f	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p	e	値	q=2	3	7	3·5	31	3 ² ·7	127	3·5·17	7·73	3·11·31
			$\sigma^2(q)$	4	8	24	32	104	128	432	592	1536
3	2	13		3.2	3.1	4.7	3.1	5.1	3.1	5.3	3.6	4.7
3	6	1093		3.0	3.0	4.5	3.0	4.9	3.0	5.1	3.5	4.5
3	12	797161		3.0	3.0	4.5	3.0	4.9	3.0	5.1	3.5	4.5
5	2	31		2.6	2.6	3.8		4.2	2.6	4.3	3.0	
5	6	19531		2.5	2.5	3.8	2.5	4.1	2.5	4.2	2.9	3.8
5	10	12207031		2.5	2.5	3.8	2.5	4.1	2.5	4.2	2.9	3.8
5	12	305175781		2.5	2.5	3.8	2.5	4.1	2.5	4.2	2.9	3.8
7	4	2801		2.3	2.3	3.5	2.3	3.8	2.3	3.9	2.7	3.5
7	12	16148168401		2.3	2.3	3.5	2.3	3.8	2.3	3.9	2.7	3.5

$(q^{f+1}-1)/(q-1)$						
10	11	12	13	14	15	16
23·87	3 ² ·5·7·13	8191	3·43·127	7·31·151	3·5·17·257	131071
2112	8736	8192	22528	38912	111456	131072
3.2	6.6	3.1	4.3	3.7	5.3	3.1
3.1	6.4	3.0	4.1	3.6	5.1	3.0
3.1	6.4	3.0	4.1	3.6	5.1	3.0
2.6	5.5	2.6	3.5		4.4	2.6
2.6	5.3	2.5	3.4	3.0	4.3	2.5
2.6	5.3	2.5	3.4	3.0	4.3	2.5
2.6	5.3	2.5	3.4	3.0	4.3	2.5
2.4	5.0	2.3	3.2	2.8	4.0	2.3
2.4	5.0	2.3	3.2	2.8	4.0	2.3

$(p^{e+1}-1)/(p-1)$ が素数			f	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p	e	値	q=3	2 ²	13	2 ³ ·5	11 ²	2 ² ·7·13	1093	2 ⁴ ·5·41	13·757	2 ² ·11 ² ·61
			$\sigma^2(q)$	7	14	90	133	784	1094	7812	10612	57722
2	1	3		4.8	3.2	6.7	3.3	6.5	3.0	7.1		5.9
2	2	7		4.8	3.1	6.7	3.3		3.0	7.1	3.2	5.9
2	4	31		4.7	3.1	6.7	3.3	6.5	3.0	7.1	3.2	5.9
2	6	127		4.7	3.1	6.7	3.3	6.5	3.0	7.1	3.2	5.9
2	10	2017		4.7	3.1	6.7	3.3	6.5	3.0	7.1	3.2	5.9
2	12	8191		4.7	3.1	6.7	3.3	6.5	3.0	7.1	3.2	5.9
2	16	131071		4.7	3.1	6.7	3.3	6.5	3.0	7.1	3.2	5.9
2	18	524287		4.7	3.1	6.7	3.3	6.5	3.0	7.1	3.2	5.9
5	2	31		3.0	2.0	4.3	2.1	4.1	1.9	4.6	2.1	3.8
5	6	19531		2.9	1.9	4.2	2.1	4.0	1.9	4.5	2.0	3.7
5	10	12207031		2.9	1.9	4.2	2.1	4.0	1.9	4.5	2.0	3.7
5	12	305175781		2.9	1.9	4.2	2.1	4.0	1.9	4.5	2.0	3.7
7	4	2801		2.7	1.8	3.9	1.9	3.8	1.8	4.2	1.9	3.4
7	12	16148168401		2.7	1.8	3.9	1.9	3.8	1.8	4.2	1.9	3.4

$(q^{f+1}-1)/(q-1)$						
10	11	12	13	14	15	16
23·3851	$2^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 73$	797161	$2^2 \cdot 547 \cdot 1093$	$11^2 \cdot 13 \cdot 4561$	$2^5 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 41 \cdot 193$	1871·34511
92448	745920	797162	4196584	8494444	55438992	64606464
3.1	8.4	3.0	5.3	3.6	7.7	3.0
3.1	8.4	3.0	5.3	3.6	7.7	3.0
3.1	8.4	3.0	5.3	3.6	7.7	3.0
3.1	8.4	3.0	5.3	3.6	7.7	3.0
3.1	8.4	3.0	5.3	3.6	7.7	3.0
3.1	8.4	3.0	5.3	3.6	7.7	3.0
3.1	8.4	3.0	5.3	3.6	7.7	3.0
3.1	8.4	3.0	5.3	3.6	7.7	3.0
3.1	8.4	3.0	5.3	3.6	7.7	3.0
2.0	5.4	1.9	3.4	2.3	4.9	1.9
2.0	5.3	1.9	3.3	2.2	4.8	1.9
2.0	5.3	1.9	3.3	2.2	4.8	1.9
2.0	5.3	1.9	3.3	2.2	4.8	1.9
1.8	4.9	1.8	3.1	2.1	4.5	1.8
1.8	4.9	1.8	3.1	2.1	4.5	1.8

$(p^{e+1}-1)/(p-1)$ が素数			f	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p	e	値	$q=5$	$2 \cdot 3$	31	$2^2 \cdot 3 \cdot 13$	11·71	$2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 31$	19531	$2^3 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 313$	$2 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 31$	$2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 71 \cdot 521$
			$\sigma 2(q)$	12	32	394	864	9984	19532	263760	1557504	5412096
2	1	3			2.6		2.8		2.5			
2	2	7		4.9	2.6	6.3	2.8		2.5	6.8		5.5
2	4	31		4.8		6.3	2.8		2.5	6.8		5.5
2	6	127		4.8	2.6	6.3	2.8	6.4	2.5	6.8	8.0	5.5
2	10	2017		4.8	2.6	6.3	2.8	6.4	2.5	6.8	8.0	5.5
2	12	8191		4.8	2.6	6.3	2.8	6.4	2.5	6.8	8.0	5.5
2	16	131071		4.8	2.6	6.3	2.8	6.4	2.5	6.8	8.0	5.5
3	2	13		3.8	2.0		2.2	5.0	1.9		6.2	4.3
3	6	1093		3.6	1.9	4.7	2.1	4.8	1.9	5.1	6.0	4.2
3	12	797161		3.6	1.9	4.7	2.1	4.8	1.9	5.1	6.0	4.2
7	4	2801		2.8	1.5	3.7	1.6	3.7	1.5	3.9	4.7	3.2
7	12	16148168401		2.8	1.5	3.7	1.6	3.7	1.5	3.9	4.7	3.2

$(q^{f+1}-1)/(q-1)$						
10	11	12	13	14	15	16
12207031	$2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 601$	305175781	$2 \cdot 3 \cdot 29 \cdot 449 \cdot 19531$	$11 \cdot 31 \cdot 71 \cdot 181 \cdot 1741$	$2^4 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 313 \cdot 11489$	409·466344409
12207032	196338688	305175781	3164184000	8765632512	112738409280	191201208100
2.5		2.5		2.9		2.5
2.5		2.5	5.2	2.9	7.4	2.5
2.5		2.5	5.2		7.4	2.5
2.5	8.0	2.5	5.2	2.9	7.4	2.5
2.5	8.0	2.5	5.2	2.9	7.4	2.5
2.5	8.0	2.5	5.2	2.9	7.4	2.5
2.5	8.0	2.5	5.2	2.9	7.4	2.5
1.9		1.9	4.0	2.2		1.9
1.9	6.0	1.9	3.9	2.2	5.5	1.9
1.9	6.0	1.9	3.9	2.2	5.5	1.9
1.5	4.7	1.5	3.0	1.7	4.3	1.5
1.7	4.7	1.5	3.0	1.7	4.3	1.5

$(p^{e+1}-1)/(p-1)$ が素数			f	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p	e	値	$q=7$	2^3	$3 \cdot 19$	$2^4 \cdot 5^2$	2801	$2^3 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 43$	294733	$2^5 \cdot 5^2 \cdot 1201$	$2^3 \cdot 3 \cdot 7^3 \cdot 19 \cdot 43$	$2^3 \cdot 11 \cdot 191 \cdot 2801$
			$\sigma_2(q)$	15	80	961	2802	52800	142020	2347506	21120000	96837120
2	1	3		4.4		5.6	2.3		2.4	5.7		4.8
2	2	7		4.3	3.3	5.6	2.3	6.3	2.4	5.7		4.8
2	4	31		4.3	3.3	5.6	2.3	6.3	2.4	5.7	7.3	4.8
2	6	127		4.3	3.3	5.6	2.3	6.3	2.4	5.7	7.3	4.8
2	10	2017		4.3	3.3	5.6	2.3	6.3	2.4	5.7	7.3	4.8
2	12	8191		4.3	3.3	5.6	2.3	6.3	2.4	5.7	7.3	4.8
2	16	131071		4.3	3.3	5.6	2.3	6.3	2.4	5.7	7.3	4.8
3	2	13		3.3	2.5	4.4	1.8	4.9	1.9	4.4	5.7	3.7
3	6	1093		3.2	2.5	4.2	1.8	4.7	1.8	4.3	5.5	3.6
3	12	797161		3.2	2.4	4.2	1.8	4.7	1.8	4.3	5.5	3.6
5	2	31		2.7	2.1	3.6	1.5	4.0	1.5	3.6	4.7	3.1
5	6	19531		2.7	2.0	3.5	1.5	3.9	1.5	3.6	4.6	3.0
5	10	12207031		2.7	2.0	3.5	1.5	3.9	1.5	3.6	4.6	3.0
5	12	305175781		2.7	2.0	3.5	1.5	3.9	1.5	3.6	4.6	3.0

$(q^{f+1}-1)/(q-1)$						
10	11	12	13	14	15	16
1123-293459	$2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 43 \cdot 181$	16148168401	$2^3 \cdot 29 \cdot 113 \cdot 911 \cdot 4733$	$3 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 2801 \cdot 159871$	$2^6 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 1201 \cdot 169553$	14069-2767631689
329849040	8619170560	16148168402	221403030400	1146781040640	14442767744320	30940577878300
2.3		2.3	4.6		6.1	2.3
2.3	8.7	2.3	4.6	3.4	6.1	
2.3	8.7	2.3	4.6		6.1	2.3
2.3	8.7	2.3	4.6	3.4	6.1	2.3
2.3	8.7	2.3	4.6	3.4	6.1	2.3
2.3	8.7	2.3	4.6	3.4	6.1	2.3
2.3	8.7	2.3	4.6	3.4	6.1	2.3
1.8		1.8	3.6	2.6	4.7	1.8
1.8	6.5	1.8	3.4	2.5	4.6	1.8
1.8	6.5	1.8	3.4	2.5	4.6	1.8
1.5	5.6	1.5	2.9		3.9	1.5
1.5	5.4	1.5	2.9	2.1	3.8	1.5
1.5	5.4	1.5	2.9	2.1	3.8	1.5
1.5	5.4	1.5	2.9	2.1	3.8	1.5

3. 方程式 $\sigma^2(a) = k \cdot a + d$ の解 $a = p^e \cdot g$ (p, g が素数) とする。

$a = p^e \cdot g$ の場合

● $e > 0$ 、素数 p に対して、 $\sigma(p^e)$ が素数でないとき

$$a = p^e \cdot g, \quad \sigma(a) = \sigma(p^e) \cdot \sigma(g) \quad p \geq 2$$

$$\sigma(p^e) = (p^{e+1} - 1) / (p - 1) = r_1 \cdot r_2 \cdots r_n \quad r_1, r_2, \dots, r_n \text{ は素数}$$

と、 $\sigma(g)$ が互いに素の時に

$$\sigma^2(a) = k \cdot a + d$$

となるパラメータ k, d の関係を求める。 $e > 0$ に対して、 $\sigma(p^e) = (p^{e+1} - 1) / (p - 1)$ は、

$$e=3 \quad \sigma(p^e) = (p+1) \cdot (p^2+1)$$

$$e=5 \quad \sigma(p^e) = (p+1) \cdot (p^2-p+1) \cdot (p^2+p+1)$$

$$e=7 \quad \sigma(p^e) = (p+1) \cdot (p^2+1) \cdot (p^4+1)$$

$$e=8 \quad \sigma(p^e) = (p^2+p+1) \cdot (p^6+p^3+1)$$

$$e=9 \quad \sigma(p^e) = (p+1) \cdot (p^4+p^3+p^2+p+1) \cdot (p^4-p^3+p^2-p+1)$$

である。

【 $e=3$ の場合】

(1) $\sigma(p^e)$ と $\sigma(g)$ が互いに素のとき、

$$\sigma^2(a) = \sigma^2(p^e) \cdot \sigma^2(g) = (p^3 + 2 \cdot p^2 + 2 \cdot p + 4) \cdot \sigma(g)$$

より、 $\sigma^2(a) = k \cdot a + d$ は

$$(k \cdot g - \sigma^2(g)) \cdot p^3 - 2 \cdot \sigma^2(g) \cdot p^2 - 2 \cdot \sigma^2(g) \cdot p + (d - 4 \cdot \sigma^2(g)) = 0 \quad (1)$$

となる。

$$\textcircled{1} \quad k \cdot g - \sigma^2(g) = 0$$

$$2 \cdot \sigma^2(g) \cdot p^2 + 2 \cdot \sigma^2(g) \cdot p - (d - 4 \cdot \sigma^2(g)) = 0$$

より、

$$d = (4 + 2 \cdot (p-1) \cdot p) \cdot k \cdot g$$

を得る。

$$\sigma^2(a) = k \cdot a + (4 + 2 \cdot (p-1) \cdot p) \cdot k \cdot g$$

$$k \cdot g - \sigma^2(g) < > 0$$

$p=f$ のとき：

$$(p-f) \cdot \{(k \cdot g - \sigma^2(g)) \cdot p^2 + [2 \cdot \sigma^2(g) - (d - 4 \cdot \sigma^2(g)) / f] \cdot p / f - (d - 4 \cdot \sigma^2(g)) / f\}$$

と因数分解できるとし、展開すると、

$$(k \cdot g - \sigma^2(g)) \cdot p^3 - \{f \cdot (k \cdot g - \sigma^2(g)) - [2 \cdot \sigma^2(g) - (d - 4 \cdot \sigma^2(g)) / f] / f\} \cdot p^2 - 2 \cdot \sigma^2(g) \cdot p + (d - 4 \cdot \sigma^2(g))$$

となり、式(1)と等しいはずであるから、係数をくらべて、

$$f \cdot (k \cdot g - \sigma^2(g)) - [2 \cdot \sigma^2(g) - (d - 4 \cdot \sigma^2(g)) / f] / f = 2 \cdot \sigma^2(g)$$

である。よって、

$$p=f \quad d = (f^3 + 2f^2 + 2f^p + 4) \cdot \sigma^2(g) - f^3 \cdot k \cdot g$$

$$p=2 \quad d = 24 \cdot \sigma^2(g) - 8 \cdot k \cdot g$$

を得る。

例として、 $a = 2^3 \cdot 7$ なら、 $g=7$ として、 $\sigma^2(g) = 15$ で、 $\sigma^2(a) = 6 \cdot a + 24$

$$d = 24 = 24 \cdot \sigma^2(7) - 8 \cdot k \cdot g = 24 \cdot \sigma^2(7) - 8 \cdot 6 \cdot 7 = 24 \cdot (\sigma^2(7) - 2 \cdot 7) = 24$$

(2) $\sigma(p^e)$ と $\sigma(g)$ が互いに素でないとき

【 $e=3$ の場合】

① $a=2^e \cdot g$ 、

$\sigma(a) = \sigma(2^e) \cdot \sigma(g)$ 、 $\sigma(2^e) = (2^{e+1}-1)/(2-1) = r_1 \cdot r_2 \cdots r_n$ 、 r_1, r_2, \dots, r_n は素数

と、 $\sigma(g)$ が互いに素でない時に $\sigma^2(a) = k \cdot a + d$ となるパラメータ k, d の関係を求める。

素数: $3 \cdot 2^e - 1$ 及び $5 \cdot 2^f - 1$ の例

e/f	$3 \cdot 2^e - 1$	$5 \cdot 2^f - 1$
1	5	
2	11	19
3	23	
4	47	79
6	191	
7	383	
8		1279
10		5119
11	6143	
12		20479
14		81919
18	786431	1310719

イ. $a=2^3 \cdot (3 \cdot 2^e - 1)$ $\sigma(a) = \sigma(2^3) \cdot \sigma(3 \cdot 2^e - 1) = 2^e \cdot 3^2 \cdot 5$ 、 $\sigma^2(a) = 6 \cdot a + 6 \cdot (2^{e+1} - 5)$

ロ. $a=2^3 \cdot (5 \cdot 2^e - 1)$ $\sigma(a) = \sigma(2^3) \cdot \sigma(5 \cdot 2^e - 1) = 2^e \cdot 3 \cdot 5^2$ 、 $\sigma^2(a) = 5 \cdot a + 12 \cdot (2^{e+2} - 7)$

② $a=2^e \cdot q \cdot r$

$a=2^3 \cdot (3 \cdot 2^e - 1) \cdot (5 \cdot 2^f - 1)$

$\sigma(a) = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^h$ 、 $\sigma^2(a) = k \cdot a + d$ となる k 値は、6~8 の範囲にある。

表 $a=2^3 \cdot (3 \cdot 2^e - 1) \cdot (5 \cdot 2^f - 1)$ 、 $\sigma^2(a) = k \cdot a + d$ 例

e	f	a	σ^2	k	d
1	2	$2^3 \cdot 5 \cdot 19$	$3 \cdot 6 \cdot 13 \cdot 31$	7	$5^2 \cdot 29$
2	2	$2^3 \cdot 11 \cdot 19$	$13 \cdot 31^2$	7	$3 \cdot 263$
3	2	$2^3 \cdot 19 \cdot 23$	$3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 31$	7	$7 \cdot 131$
6	2	$2^3 \cdot 19 \cdot 191$	$7 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 73$	7	$3^2 \cdot 7 \cdot 43$
7	2	$2^3 \cdot 19 \cdot 383$	$3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 31^2$	7	$67 \cdot 71$
11	2	$2^3 \cdot 19 \cdot 6143$	$3 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 43 \cdot 127$	7	$53 \cdot 1249$
18	2	$2^3 \cdot 19 \cdot 786431$	$7^2 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 127 \cdot 337$	7	$3^2 \cdot 7 \cdot 37 \cdot 59 \cdot 61$
1	18	$2^3 \cdot 1310719$	$3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 31^2 \cdot 41$	8	$5 \cdot 101 \cdot 6 \cdot 229$
2	18	$2^3 \cdot 11 \cdot 1310719$	$7^2 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 127 \cdot 337$	7	$3 \cdot 7 \cdot 389 \cdot 4621$
3	18	$2^3 \cdot 23 \cdot 1310719$	$3 \cdot 13 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 89 \cdot 683$	7	$19 \cdot 23 \cdot 4801$
6	18	$2^3 \cdot 191 \cdot 1310719$	$13 \cdot 31^2 \cdot 601 \cdot 1801$	6	$103 \cdot 14619067$
7	18	$2^3 \cdot 383 \cdot 1310719$	$3 \cdot 13 \cdot 31 \cdot 2732 \cdot 8191$	6	$3 \cdot 151 \cdot 421 \cdot 15461$
11	18	$2^3 \cdot 6143 \cdot 1310719$	$3^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 31^2 \cdot 151 \cdot 331$	6	$3 \cdot 163 \cdot 509 \cdot 185753$
18	18	$2^3 \cdot 786431 \cdot 1310719$	$13 \cdot 31 \cdot 223 \cdot 616318177$	6	$19 \cdot 139 \cdot 1609 \cdot 1390789$

1. $a = p^e$

$$\sigma^2(a) = a + (p^e + p - 2) / (p - 1) \quad \text{ただし、} (p^{e+1} - 1) / (p - 1) : \text{素数}$$

2. $a = 2^e \cdot (2 \cdot 3^{k-1} - 1)$ 、 $2 \cdot 3^{k-1} - 1$: 素数 ($k = 2, 3, 4, 8, 9, 13, 20, 23 \dots$)

イ. $\sigma(a) = r^k \cdot p$ $r = 3, p = 2$

$$\textcircled{1} \quad a = 2 \cdot (2 \cdot 3^{k-1} - 1) \quad \sigma(a) = 3^f \cdot 2 \quad r = 3, p = 2 \quad \sigma^2(a) = 3 \cdot a + (3^k + 9) / 2$$

特に、 $k = 2$ なら $a = 2 \cdot 5$ 、 $\sigma^2(a) = 3 \cdot a + 3^2 = 4 \cdot a - 1$

ロ. $\sigma(a) = r^f \cdot p \cdot q$

$$\textcircled{1} \quad a = 2^2 \cdot (2 \cdot 3^{k-1} - 1) \quad \sigma(a) = 3^f \cdot 2 \cdot 7 \quad r = 3, p = 2, q = 7 \quad \sigma^2(a) = 4 \cdot a + 2^2 \cdot (3^{k-1} + 1)$$

$$\textcircled{2} \quad a = 2^3 \cdot (2 \cdot 3^{k-1} - 1) \quad \sigma(a) = 3^f \cdot 2 \cdot 5 \quad r = 3, p = 2, q = 5 \quad \sigma^2(a) = 5 \cdot a + 3^{k-1} + 31$$

$$\textcircled{3} \quad a = 2^4 \cdot (2 \cdot 3^{k-1} - 1) \quad \sigma(a) = 3^f \cdot 2 \cdot 31 \quad r = 3, p = 2, q = 31 \quad \sigma^2(a) = 4 \cdot a + 2^4 \cdot (3^{k-1} + 1)$$

$$\textcircled{4} \quad a = 2^5 \cdot (2 \cdot 3^{k-1} - 1) \quad \sigma(a) = 3^f \cdot 2 \cdot 7 \quad r = 3, p = 2, q = 7 \quad \sigma^2(a) = 5 \cdot a + 2^2 \cdot (3^{k-1} + 37)$$

特に、 $k = 2$ なら $a = 2^5 \cdot 5$ 、 $\sigma^2(a) = 6 \cdot a$

$$\textcircled{5} \quad a = 2^6 \cdot (2 \cdot 3^{k-1} - 1) \quad \sigma(a) = 3^f \cdot 2 \cdot 127 \quad r = 3, p = 2, q = 127 \quad \sigma^2(a) = 4 \cdot a + 2^6 \cdot (3^{k-1} + 5)$$

3. $a = (2^f - 1) \cdot 5^e$ 、 $2^f - 1$ はメルセンヌ素数、 $(5^{e+1} - 1) / 4$: 素数 ($e = 2, 6, 10, 12$)

イ. $\sigma(a) = r^f \cdot p$ のとき

$$a = (2^f - 1) \cdot 5^e, \quad \sigma(a) = 2^{f-2} \cdot (5^{e+1} - 1), \quad \sigma^2(a) = 2 \cdot a + (5^e + 3) \cdot 2^{f+1} + 3 \cdot (5^e - 1) / 4$$

特に、 $e = 2, f = 2$ なら、 $a = 3 \cdot 5^2$ 、 $\sigma(a) = 5^3 - 1$ 、 $\sigma^2(a) = 2^5 \cdot 7 = 3a - 1$

4. $a = 2^e \cdot 3^f$ 、 $2^{e+1} - 1$: メルセンヌ素数、 $(3^{f+1} - 1) / 2$: 素数 ($f = 2, 6, 11$)

イ. $\sigma(a) = p \cdot q$ のとき

$$a = 2^e \cdot 3^f \quad \sigma(a) = (2^{e+1} - 1) \cdot (3^{f+1} - 1) / 2, \quad \sigma^2(a) = 3 \cdot a + 2^e$$

5. $a = 2^e \cdot (2^k - 1)$ 、 $2^{e+1} - 1$: メルセンヌ素数、 $2^k - 1$: メルセンヌ素数

イ. $\sigma(a) = r^k \cdot q$ のとき

$$a = 2^e \cdot (2^k - 1) \quad \sigma(a) = 2^k \cdot (2^{e+1} - 1), \quad \sigma^2(a) = 4 \cdot a + 2^{e+1}$$

6. $a = 2^e \cdot (2^f - 1) \cdot (2^g - 1)$ 、 $g > f$ 、 $2^{e+1} - 1, 2^f - 1, 2^g - 1$; メルセンヌ素数

$$\sigma(a) = 2^{f+g} \cdot (2^{e+1} - 1) \quad \text{のとき} \quad \sigma^2(a) = (2^{f+g+1} - 1) \cdot 2^{e+1} \quad \text{で、} \quad \sigma^2(a) = k \cdot a + d \quad k = 4, 5, 6$$

$$\sigma^2(a) / a = (2^{f+g+1} - 1) \cdot 2^{e+1} / [2^e \cdot (2^f - 1) \cdot (2^g - 1)] = 2 \cdot (2^{f+g+1} - 1) / [(2^f - 1) \cdot (2^g - 1)]$$

特に、 $f = 2, g = 3$ のとき $\sigma^2(a) = 6 \cdot a$

$$a = 2 \cdot 3 \cdot 7, 2^2 \cdot 3 \cdot 7, 2^3 \cdot 3 \cdot 7, \dots$$

7. $a = 2^e \cdot (2^f - 1) \cdot (2 \cdot 3^{k-1} - 1)$ 、 $2^{e+1} - 1, 2^f - 1$: メルセンヌ素数、

$2 \cdot 3^{k-1} - 1$: 素数 ($k = 2, 3, 4, 8, 9, 13, 20, 23 \dots$)、

ただし、 $e > 1$ でなければならない。($e = 1$ だと、 $2^{e+1} - 1 = 3$ となるので、除外する。)

$$\sigma(a) = (2^{e+1} - 1) \cdot 2^{f+1} \cdot 3^{k-1}, \quad \sigma^2(a) = 2^e \cdot (2^{f+2} - 1) \cdot (3^k - 1),$$

$$\sigma^2(a) / a = (2^{f+2} - 1) \cdot (3^k - 1) / [(2^f - 1) \cdot (2 \cdot 3^{k-1} - 1)]$$

特に、 $f = 2, k = 2, a = 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ 、 $\sigma(a) = 5 \cdot 4 \cdot 6 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ $\sigma^2(a) = 4 \cdot 15 \cdot 8 = 480 = 8a$

終わり