$a+b\sqrt{2}$ の無理数の連分数展開
Continued fractions of irrational numbers $a+b\sqrt{2}$

学習院大学理学部数学科
鶴見 圭史
by K.Tsurumi

2010 年 11 月 19 日

目次

1 目的

無理数 α の連分数展開とは、無理数 $\alpha > 1$ のとき $N_1 = [\alpha]$ とおく

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha - N_1} \quad , \quad N_2 = [\alpha_1]$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - N_2} \quad , \quad \cdots\cdots$$

とする。

$$\alpha - N_1 = \frac{1}{\alpha_1}$$

$$\alpha = N_1 + \frac{1}{\alpha_1}$$

$$\alpha_1 = N_2 + \frac{1}{\alpha_2}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

すると

$$\alpha = N_1 + \cfrac{1}{N_2 + \cfrac{1}{N_3 + \cfrac{1}{\vdots}}}$$

のように無限に続く分数とかける。これを（正規）連分数（continued fraction）という。α が二次無理数のとき $[N_1, N_2, N_3, \ldots]$ は必ずあるところから、繰り返しがおきることが知られている。繰り返す部分を循環節といい、その長さを周期という。繰り返しにいくまでのところをひげという。正の有理数 a, b について、$\alpha = a + b\sqrt{2}$ に関してひげの長さと循環節の周期について研究する。

2 方法

2.1 プログラム

```
seisu([A,B,C],N):- N is floor((A+B*sqrt(2))/C).
hiku([A1,B,C]=[A,B,C]-N):- A1 is A-N*C.
gyaku([A1,B1,C1]=1/[A,B,C]):- A1 is -C*A,B1 is C*B,C1 is -A*A+2*B*B.

tugi([A,B,C],[A2,B2,C2],N):- seisu([A,B,C],N),
     hiku([A1,B1,C1]=[A,B,C]-N),
     gyaku([A0,B0,C0]=1/[A1,B1,C1]),
     gcd3(DD=[A0,B0,C0]),
     A2 is A0//DD,
     B2 is B0//DD,
     C2 is C0//DD.
/** res_q(A = B*Q + R) **/
res_q(A = B*Q + R):- Q is floor(A/B),R is A - B*Q.
/** 4.1 **/

/** gcd(D=A*X+B*Y) A,B given; D,X,Y not given **/
gcd(A=A*1+0*0).
gcd(D=A*X+B*Y):-
    res_q(A=B*Q+R),
    (A1,B1)=(B,R),
    gcd(D=A1*X1+B1*Y1),
    T is X1-Y1*Q,(X,Y) =(Y1,T).
/** 4.4(4.1 ) **/



gcd3(DD=[A,B,C]):- gcd(D=A*X+B*Y),gcd(DD=C*X1+D*Y1).



kurikaeshi(L,C,N):- C1 is C+1,C1=<N,
    tugi(L,M),write(C=L),nl,
    kurikaeshi(M,C1,N).
kurikaeshi(L,C,N).



:-dynamic ts/1.
ts([0,0,0]).
sagasu(L,C,N):- tugi(L,M,Q),
```

```
    write(C=L),put(9),
    write(Q),nl,
    C1 is C+1,C1=<N,
    (\+ts(M)->(asserta(ts(M)),sagasu(M,C1,N));write(C1=M)).
sagasu0(L,C,N):- abolish(ts/1),
    asserta(ts(L)),
    sagasu(L,C,N).



for(I =<J,I) :- I =<J.
for(I =<J,K) :- I =<J,
    I1 is I+1,for(I1 =<J,K).
```

2.2　プログラムについて

無理数 $\alpha > 1$, N_1 を α の整数部分 $[\alpha]$ とすると、
$\alpha - N_1 \quad < \quad 1 \quad , \quad \alpha_1 = \dfrac{1}{\alpha - N_1}$ として繰り返す。
$\alpha - N_1 = \dfrac{1}{\alpha_1}$ ，　$\alpha = N + \dfrac{1}{\alpha_1}$
$\alpha_1 = N_2 + \dfrac{1}{\alpha_2}$
$\alpha_2 = N_3 + \dfrac{1}{\alpha_3}$
とすると、

$$\alpha = N_1 + \cfrac{1}{N_2 + \cfrac{1}{N_3 + \cdots}}$$

となる。このときできた数列 $N_1, N_2, N_3, \cdots$ を α の連分数展開という。
α に対して、連分数展開をすると、途中から循環する部分がるので、これを求める。
a, b を有理数とするとき、$\alpha = a + b\sqrt{2}$ を整数の組 $[A, B, C]$ で表示するため、a, b の分母を共通の C にして、
$\alpha = \dfrac{A}{C}, \alpha = \dfrac{B}{C}$ とおくと、
$\alpha = \dfrac{A + B\sqrt{2}}{C}$ となる。
この形を用いて α の連分数展開をする。

例)　$A = 0, B = 3, C = 2$ とすると、$[\alpha] = 2$ になり、
$\alpha_1 = \cfrac{1}{\cfrac{3\sqrt{2}}{2} - 2} = 3\sqrt{2} + 4$ となるので、
$[\alpha_1] = 8$ になり、
$\alpha_2 = \dfrac{1}{3\sqrt{2} + 4 - 8} = \dfrac{3\sqrt{2} + 4}{2}$ となる。
$[\alpha_2] = 4$ で、
$\alpha_3 = \cfrac{1}{\cfrac{3\sqrt{2} + 4}{2} - 4} = 3\sqrt{2} + 4$ なので、
$\alpha_3 = \alpha_1$

よって、$2, 8, 4, 8, 4, 8, 4, \cdots$ となり、以下循環する。$A = 0, B = 3, C = 2$ としたときの、連分数展開の循環節は $[8, 4]$ になる。

3　結果

3.1　表の見方

表 1: 例

α	[A,B,C]	N
0	[0, 1, 7]	0
1	[0, 7, 2]	4
2	[8, 7, 17]	1
3	[9, 7, 1]	18
4	[9, 7, 17]	1
5	[8, 7, 2]	8
6	[8, 7, 17]	

・まず表の見方を説明する。

2.2 プログラムについて　で述べたように、今回 $\alpha = \dfrac{A+B\sqrt{2}}{C}$ の形を用いて連分数展開を行っている。ここでは、[A,B,C]=[0,1,7] としたときの表の見方を説明する。

$A = 0, B = 1, C = 7$ とすると、
$\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{7}$　，　$N_1 = [\alpha] = 0$ となる。
つまり表 1 の 2 行目の $0, [0, 1, 7], 0$ は、このときの $\alpha, [A, B, C], N_1$ を示す。

以下　連分数展開の定義に従って
$\alpha_1 = \dfrac{1}{\alpha - N_1} = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}$　，　$N_2 = [\alpha_1] = 4$ となるので、
$[A, B, C] = [0, 7, 2]$
よって、表 1 の 3 行目の $1, [0, 7, 2], 4$ はこのときの $\alpha_1, [A, B, C], N_2$ を示す。

$\alpha_2 = \dfrac{1}{\alpha_1 - N_2} = \dfrac{8+7\sqrt{2}}{17}$　，　$N_3 = [\alpha_2] = 1$ となるので、
$[A, B, C] = [8, 7, 17]$
よって、表 1 の 4 行目の $2, [8, 7, 17], 1$ はこのときの $\alpha_2, [A, B, C], N_3$ を示す。

$\alpha_3 = \dfrac{1}{\alpha_2 - N_3} = 9 + 7\sqrt{2}$　，　$N_4 = [\alpha_3] = 18$ となるので、
$[A, B, C] = [9, 7, 1]$
よって、表 1 の 5 行目の $3, [9, 7, 1], 18$ はこのときの $\alpha_3, [A, B, C], N_4$ を示す。

$\alpha_4 = \dfrac{1}{\alpha_3 - N_4} = \dfrac{9+7\sqrt{2}}{17}$　，　$N_5 = [\alpha_4] = 1$ となるので、
$[A, B, C] = [9, 7, 17]$
よって、表 1 の 6 行目の $4, [9, 7, 17], 1$ はこのときの $\alpha_4, [A, B, C], N_5$ を示す。

$\alpha_5 = \dfrac{1}{\alpha_4 - N_5} = \dfrac{8+7\sqrt{2}}{2}$, $N_6 = [\alpha_5] = 8$ となるので、
$[A, B, C] = [8, 7, 2]$
よって、表 1 の 7 行目の $5, [8, 7, 2], 1$ はこのときの $\alpha_5, [A, B, C], N_6$ を示す。

$\alpha_6 = \dfrac{1}{\alpha_5 - N_6} = \dfrac{8+7\sqrt{2}}{17} = \alpha_2$ となる。

したがって、$0, 4, 1, 18, 1, 8, 1, 18, 1, 8, 1, 18, 1, 8, \cdots$ となり、以下循環する。$A = 0, B = 1, C = 7$ としたときの、連分数展開の循環節は $[1, 18, 1, 8]$ となり、ひげの長さ 2 となる。

$$\alpha = 0 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{\vdots}}}}}}}}$$

3.2 周期１の場合

表 2: ひげの長さ１、周期１ その１

α	[A,B,C]	N	α	[A,B,C]	N	α	[A,B,C]	N	α	[A,B,C]	N
0	[0, 4, 4]	1	0	[0, 5, 5]	1	0	[0, 6, 6]	1	0	[0, 7, 7]	1
1	[1, 1, 1]	2	1	[1, 1, 1]	2	1	[1, 1, 1]	2	1	[1, 1, 1]	2
2	[1, 1, 1]		2	[1, 1, 1]		2	[1, 1, 1]		2	[1, 1, 1]	

表 3: ひげの長さ１、周期１ その２

α	[A,B,C]	N	α	[A,B,C]	N	α	[A,B,C]	N	α	[A,B,C]	N
0	[0, 20, 4]	7	0	[0, 25, 5]	7	0	[0, 30, 6]	7	0	[0, 35, 7]	7
1	[7, 5, 1]	14	1	[7, 5, 1]	14	1	[7, 5, 1]	14	1	[7, 5, 1]	14
2	[7, 5, 1]		2	[7, 5, 1]		2	[7, 5, 1]		2	[7, 5, 1]	

3.3　周期２の場合

表 4: ひげの長さ１、周期２ その１

α	[A,B,C]	N	α	[A,B,C]	N	α	[A,B,C]	N
0	[0, 3, 2]	2	0	[0, 6, 3]	2	0	[0, 3, 4]	1
1	[4, 3, 1]	8	1	[1, 1, 2]	1	1	[8, 6, 1]	16
2	[4, 3, 2]	4	2	[2, 2, 1]	4	2	[4, 3, 4]	2
3	[4, 3, 1]		3	[1, 1, 2]		3	[8, 6, 1]	
0	[0, 4, 2]	2	0	[0, 9, 3]	4	0	[0, 6, 4]	2
1	[1, 1, 2]	1	1	[4, 3, 2]	4	1	[4, 3, 1]	8
2	[2, 2, 1]	4	2	[4, 3, 1]	8	2	[4, 3, 2]	4
3	[1, 1, 2]		3	[4, 3, 2]		3	[4, 3, 1]	
0	[0, 6, 2]	4	0	[0, 17, 3]	8	0	[0, 8, 4]	2
1	[4, 3, 2]	4	1	[72, 51, 2]	72	1	[1, 1, 2]	1
2	[4, 3, 1]	8	2	[24, 17, 3]	16	2	[2, 2, 1]	4
3	[4, 3, 2]		3	[72, 51, 2]		3	[1, 1, 2]	
0	[0, 12, 2]	8	0	[0, 18, 3]	8	0	[0, 12, 4]	4
1	[4, 3, 4]	2	1	[4, 3, 4]	2	1	[4, 3, 2]	4
2	[8, 6, 1]	16	2	[8, 6, 1]	16	2	[4, 3, 1]	8
3	[4, 3, 4]		3	[4, 3, 4]		3	[4, 3, 2]	
0	[0, 17, 2]	12	0	[0, 30, 3]	14	0	[0, 17, 4]	6
1	[24, 17, 1]	48	1	[7, 5, 2]	7	1	[48, 34, 1]	96
2	[24, 17, 2]	24	2	[14, 10, 1]	28	2	[24, 17, 4]	12
3	[24, 17, 1]		3	[7, 5, 2]		3	[48, 34, 1]	
0	[0, 20, 2]	14	0	[0, 34, 3]	16	0	[0, 24, 4]	8
1	[7, 5, 2]	7	1	[72, 51, 4]	36	1	[4, 3, 4]	2
2	[14, 10, 1]	28	2	[48, 34, 3]	32	2	[8, 6, 1]	16
3	[7, 5, 2]		3	[72, 51, 4]		3	[4, 3, 4]	
0	[0, 24, 2]	16	0	[0, 36, 3]	16	0	[0, 34, 4]	12
1	[4, 3, 8]	1	1	[4, 3, 8]	1	1	[24, 17, 1]	48
2	[16, 12, 1]	32	2	[16, 12, 1]	32	2	[24, 17, 2]	24
3	[4, 3, 8]		3	[4, 3, 8]		3	[24, 17, 1]	
0	[0, 34, 2]	24				0	[0, 40, 4]	14
1	[24, 17, 2]	24				1	[7, 5, 2]	7
2	[24, 17, 1]	48				2	[14, 10, 1]	28
3	[24, 17, 2]					3	[7, 5, 2]	
						0	[0, 48, 4]	16
						1	[4, 3, 8]	1
						2	[16, 12, 1]	32
						3	[4, 3, 8]	

表 5: ひげの長さ１、周期２ その２

α	[A,B,C]	N	α	[A,B,C]	N	α	[A,B,C]	N
0	[0, 10, 5]	2	0	[0, 9, 6]	2	0	[0, 5, 7]	1
1	[1, 1, 2]	1	1	[4, 3, 1]	8	1	[49, 35, 1]	98
2	[2, 2, 1]	4	2	[4, 3, 2]	4	2	[7, 5, 7]	2
3	[1, 1, 2]		3	[4, 3, 1]		3	[49, 35, 1]	
0	[0, 15, 5]	4	0	[0, 12, 6]	2	0	[0, 10, 7]	2
1	[4, 3, 2]	4	1	[1, 1, 2]	1	1	[49, 35, 2]	49
2	[4, 3, 1]	8	2	[2, 2, 1]	4	2	[14, 10, 7]	4
3	[4, 3, 2]		3	[1, 1, 2]		3	[49, 35, 2]	
0	[0, 30, 5]	8	0	[0, 17, 6]	4	0	[0, 14, 7]	2
1	[4, 3, 4]	2	1	[72, 51, 1]	144	1	[1, 1, 2]	1
2	[8, 6, 1]	16	2	[24, 17, 6]	8	2	[2, 2, 1]	4
3	[4, 3, 4]		3	[72, 51, 1]		3	[1, 1, 2]	
			0	[0, 18, 6]	4	0	[0, 21, 7]	4
			1	[4, 3, 2]	4	1	[4, 3, 2]	4
			2	[4, 3, 1]	8	2	[4, 3, 1]	8
			3	[4, 3, 2]		3	[4, 3, 2]	
			0	[0, 34, 6]	8	0	[0, 42, 7]	8
			1	[72, 51, 2]	72	1	[4, 3, 4]	2
			2	[24, 17, 3]	16	2	[8, 6, 1]	16
			3	[72, 51, 2]		3	[4, 3, 4]	
			0	[0, 36, 6]	8			
			1	[4, 3, 4]	2			
			2	[8, 6, 1]	16			
			3	[4, 3, 4]				

表 6:

α	[A,B,C]	N	α	[A,B,C]	N	α	[A,B,C]	N
0	[0, 5, 2]	3	0	[0, 10, 4]	3	0	[0, 15, 6]	3
1	[6, 5, 7]	1	1	[6, 5, 7]	1	1	[6, 5, 7]	1
2	[1, 5, 7]	1	2	[1, 5, 7]	1	2	[1, 5, 7]	1
3	[6, 5, 2]	6	3	[6, 5, 2]	6	3	[6, 5, 2]	6
4	[6, 5, 7]		4	[6, 5, 7]		4	[6, 5, 7]	
0	[0, 13, 2]	9	0	[0, 26, 4]	9	0	[0, 39, 6]	9
1	[18, 13, 7]	5	1	[18, 13, 7]	5	1	[18, 13, 7]	5
2	[17, 13, 7]	5	2	[17, 13, 7]	5	2	[17, 13, 7]	5
3	[18, 13, 2]	18	3	[18, 13, 2]	18	3	[18, 13, 2]	18
4	[18, 13, 7]		4	[18, 13, 7]		4	[18, 13, 7]	
0	[0, 29, 2]	20						
1	[40, 29, 41]	1						
2	[1, 29, 41]	1						
3	[40, 29, 2]	40						
4	[40, 29, 41]							

4　考察

4.1　周期　1　について

4.1.1

$\alpha\ = \dfrac{A+B\sqrt{2}}{C}$　　,　　$N_1 = [\alpha]$

$\alpha_1 = \dfrac{1}{\alpha - N_1}$　　,　　$N_2 = [\alpha_1]$

$\alpha_2 = \dfrac{1}{\alpha_1 - N_2}$　　,　　$\cdots\cdots$

$N_2 = x$　とおく。

周期 1 より　$\alpha_1 = \alpha_2$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - x} = \alpha_1$$

$$\alpha_1^2 - \alpha_1 x = 1$$

$$\alpha_1^2 - x\alpha_1 - 1 = 0$$

$$D = x^2 + 4 = 2y^2$$

$$\alpha_1 = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2} = \frac{x+y\sqrt{2}}{2}$$

$$x^2 + 4 = 2y^2$$

$$x^2 = 2y^2 - 4 \quad \cdots\cdots①$$

$x\ = 2A$　とおき、①に代入する。

$$4A^2 = 2y^2 - 4$$

$$2A^2 = y^2 - 2$$

$$y^2 = 2A^2 + 2 \cdots\cdots②$$

$y = 2B$　とおき、②に代入する。

$$4B^2 = 2A^2 + 2$$

$$2B^2 = A^2 + 1$$

$$-1 = A^2 - 2B^2 = (A-\sqrt{2}B)(A+\sqrt{2}B) \cdots\cdots③$$

よって、　$A = 1$　,　$B = 1$　のとき、　$x = 2$　,　$y = 2$　である。

したがって、$N_2 = 2$　,　$\alpha_1 = 1 + \sqrt{2}$

$A=1, B=1$　　を③に代入する。

$-1=(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})$

$(-1)^3=(7-5\sqrt{2})(7+5\sqrt{2})$

$-1=7^2-2\cdot 5^2$

よって、　$A=7$　,　$B=5$　　のとき、　$x=14$　,　$y=10$　　である。

したがって、$N_2=14$　,　$\alpha_1=7+5\sqrt{2}$

$$
\begin{aligned}
(1-\sqrt{2})^5 &= (1-\sqrt{2})^2(1-\sqrt{2})^3 \\
&= (1-2\sqrt{2}+2)(7-5\sqrt{2}) \\
&= 41-29\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

よって、　$A=41$　,　$B=29$　　のとき、　$x=28$　,　$y=58$　　である。

したがって、$N_2=82$　,　$\alpha_1=41+29\sqrt{2}$

■

4.1.2

表 7: 表

A	B	y $(y=2B)$	x $(x=2A)$	N_2 $(N_2=x)$	α_1 $\left(\alpha_1=\dfrac{N_2+y\sqrt{2}}{2}\right)$
1	1	2	2	2	$1+\sqrt{2}$
7	5	10	14	14	$7+5\sqrt{2}$
41	29	58	82	82	$41+29\sqrt{2}$

4.2 周期　2　について

4.2.1

$$\alpha\ = \frac{A+B\sqrt{2}}{C} \quad , \quad N_1 = [\alpha]$$
$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha - N_1} \quad , \quad N_2 = [\alpha_1]$$
$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - N_2} \quad , \quad N_3 = [\alpha_2]$$
$$\alpha_3 = \frac{1}{\alpha_2 - N_3} \quad , \quad N_4 = [\alpha_3]$$

周期 2 より　$\alpha_1 = \alpha_3$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\alpha_1 - N_2}$$

$$\alpha_3 = \alpha_1$$
$$\alpha_3 = \frac{1}{\alpha_2 - N_3}$$
$$\alpha_1 = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1 - N_2} - N_3}$$
$$\alpha_1 = \frac{\alpha_1 - N_2}{1 - N_3(\alpha_1 - N_2)}$$

$$\alpha_1 - N_3\alpha_1(\alpha_1 - N_2) = \alpha_1 - N_2$$
$$\alpha_1 - N_3\alpha_1^2 + N_2N_3\alpha_1 - \alpha_1 + N_2 = 0$$
$$-N_3\alpha_1^2 + N_2N_3\alpha_1 + N_2 = 0 \cdots\cdots ①$$

$$D = N_2^2N_3^2 + 4N_2N_3 \cdots\cdots ②$$
$$= 2M^2$$

$N_2N_3 = Z$　とおき、②に代入する。

$$Z^2 + 4Z = 2M^2$$
$$Z^2 + 4Z + 4 = 2M^2 + 4$$
$$(Z+2)^2 = 2(M^2+2) \cdots\cdots ③$$

$U = Z + 2$　とおき、③に代入する。

$$U^2 = 2(M^2+2) \cdots\cdots ④$$

$U = 2V$　とおき、④に代入する。

$$4V^2 = 2(M^2+2)$$
$$2V^2 = (M^2+2)$$
$$M^2 = 2V^2 - 2 \cdots\cdots ⑤$$

$M = 2K$ とおき、⑤に代入する。

$$4K^2 = 2V^2 - 2$$
$$2K^2 = V^2 - 1$$
$$1 = V^2 - 2K^2$$
$$= (V - \sqrt{2}K)(V + \sqrt{2}K)$$

$A = 3 - 2\sqrt{2}$, $\bar{A} = 3 + 2\sqrt{2}$ とおく、

$$A\bar{A} = (3 - 2\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})$$
$$= 9 - 8$$
$$= 1$$

よって、 $V = 3$, $K = 2$
$M = 4$, $U = 6$
$Z = 4$, $N_2 N_3 = 4$

また、 $N_2 \neq N_3$ かつ N_2 , $N_3 \in Z$
したがって、 $N_2 = 1$, $N_3 = 4$ または、 $N_2 = 4$, $N_3 = 1$

ア) $N_2 = 1$, $N_3 = 4$ のとき

$$-4\alpha_1^2 + 4\alpha_1 + 1 = 0$$
$$4\alpha_1^2 - 4\alpha_1 - 1 = 0$$
$$\alpha_1 = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{4}$$

よって、 $\alpha_1 = \dfrac{2 + \sqrt{4 + 4}}{4}$

$$= \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$$

イ) $N_2 = 4$, $N_3 = 1$ のとき

$$-\alpha_1^2 + 4\alpha_1 + 4 = 0$$
$$\alpha_1\ 2 - 4\alpha_1 - 4 = 0$$
$$\alpha_1 = 2 \pm \sqrt{4 + 4}$$

よって、 $\alpha_1 = 2 + 2\sqrt{2}$

次に、イ) で求めた α_1 より $N_2 = [\alpha_1]$ とおき、ここで求める α_2 が ア) で求めた α_1 と等しくなるのか確かめる。また、その逆も確かめてみる。

(Ⅰ) イ) $\longrightarrow$ ア)

$$\alpha_1 = 2 + 2\sqrt{2} \quad , \quad N_2 = [\alpha_1] = 4$$

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \frac{1}{\alpha_1 - N_2} \\ &= \frac{1}{2 + 2\sqrt{2} - 4} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2} - 2} \\ &= \frac{1 + \sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

(Ⅱ) ア) $\longrightarrow$ イ) も同様。

次に、 $A=3-2\sqrt{2}$, $\bar{A}=3+2\sqrt{2}$ より、

$$A^2=17-12\sqrt{2} \quad , \quad \bar{A}^2=17+12\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} A^2\bar{A}^2 &= 289-288 \\ &= 1 \end{aligned}$$

よって、 $V=17$, $K=12$

$M=24$, $U=34$

$Z=32$, $N_2N_3=32$

また、 $N_2\neq N_3$ かつ N_2 , $N_3 \in Z$

したがって、

$$\begin{cases} N_2=1 & N_3=32 \\ N_2=2 & N_3=16 \\ N_2=4 & N_3=8 \\ N_2=8 & N_3=4 \\ N_2=16 & N_3=2 \\ N_2=32 & N_3=1 \end{cases}$$

ウ) $N_2=1$, $N_3=32$ のとき

$$-32\alpha_1^2+32\alpha_1+1=0$$

$$32\alpha_1^2-32\alpha_1-1=0$$

$$\begin{aligned} D &= 16^2+32 \\ &= 16(16+2) \\ &= 4^2(2\cdot 3^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{16\pm\sqrt{D}}{32} \\ &= \frac{16\pm 12\sqrt{2}}{32} \end{aligned}$$

よって、 $\alpha_1=\dfrac{4+3\sqrt{2}}{8}$

エ) $N_2=2$, $N_3=16$ のとき

$$-16\alpha_1^2+32\alpha_1+2=0$$

$$8\alpha_1^2-16\alpha_1-1=0$$

$$\begin{aligned} D &= 8^2+8 \\ &= 72 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{8\pm\sqrt{D}}{8} \\ &= \frac{8\pm 6\sqrt{2}}{8} \end{aligned}$$

よって、 $\alpha_1=\dfrac{4+3\sqrt{2}}{4}$

オ) $N_2=4 \quad , \quad N_3=8$ 　のとき

$$-8\alpha_1^2+32\alpha_1+4=0$$
$$2\alpha_1^2-8\alpha_1-1=0$$
$$D=4^2+2$$
$$=18$$

$$\alpha_1=\frac{4\pm3\sqrt{2}}{2}$$

よって、 $\alpha_1=\dfrac{4+3\sqrt{2}}{2}$

カ) $N_2=8 \quad , \quad N_3=4$ 　のとき

$$-4\alpha_1^2+32\alpha_1+8=0$$
$$\alpha_1^2-8\alpha_1-2=0$$
$$D=16+2$$
$$=18$$

$$\alpha_1=4\pm3\sqrt{2}$$

よって、 $\alpha_1=4+3\sqrt{2}$

キ) $N_2=16 \quad , \quad N_3=2$ 　のとき

$$-2\alpha_1^2+32\alpha_1+16=0$$
$$\alpha_1^2-16\alpha_1-8=0$$
$$D=8^2+8$$
$$=72$$

$$\alpha_1=8\pm6\sqrt{2}$$

よって、 $\alpha_1=8+6\sqrt{2}$

ク) $N_2=32 \quad , \quad N_3=1$ 　のとき

$$-\alpha_1^2+32\alpha_1+32=0$$
$$\alpha_1^2-32\alpha_1-32=0$$
$$D=16^2+32$$
$$=16(16+2)$$
$$=4^2(2\cdot3^2)$$

$$\alpha_1=16\pm12\sqrt{2}$$

よって、 $\alpha_1=16+12\sqrt{2}$

次に、ク) で求めた α_1 より $N_2 = [\alpha_1]$ とおき、ここで求める α_2 が ウ) で求めた α_1 と等しくなるのか確かめる。また、その逆も確かめてみる。

(Ⅲ)　ク)　$\longrightarrow$　ウ)

$$\alpha_1 = 16 + 12\sqrt{2} \quad , \quad N_2 = [\alpha_1] = 32$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{1}{\alpha_1 - N_2} \\ &= \frac{1}{16 + 12\sqrt{2} - 32} \\ &= \frac{1}{12\sqrt{2} - 16} \\ &= \frac{12\sqrt{2} + 16}{32} \\ &= \frac{4 + 3\sqrt{2}}{8} \end{aligned}$$

(Ⅳ)　ウ)　$\longrightarrow$　ク)　も同様。

次に、キ) で求めた α_1 より $N_2 = [\alpha_1]$ とおき、ここで求める α_2 が エ) で求めた α_1 と等しくなるのか確かめる。また、その逆も確かめてみる。

(Ⅴ)　キ)　$\longrightarrow$　エ)

$$\alpha_1 = 8 + 6\sqrt{2} \quad , \quad N_2 = [\alpha_1] = 16$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{1}{\alpha_1 - N_2} \\ &= \frac{1}{8 + 6\sqrt{2} - 16} \\ &= \frac{1}{6\sqrt{2} - 8} \\ &= \frac{6\sqrt{2} + 8}{8} \\ &= \frac{4 + 3\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

(Ⅵ)　エ)　$\longrightarrow$　キ)　も同様。

次に、カ) で求めた α_1 より $N_2=[\alpha_1]$ とおき、ここで求める α_2 が オ) で求めた α_1 と等しくなるのか確かめる。また、その逆も確かめてみる。

(Ⅶ)　カ)　$\longrightarrow$　オ)

$$\alpha_1 = 4+3\sqrt{2} \quad , \quad N_2=[\alpha_1]=8$$

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \frac{1}{\alpha_1 - N_2}\\ &= \frac{1}{4+3\sqrt{2}-8}\\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}-4}\\ &= \frac{3\sqrt{2}+4}{18-16}\\ &= \frac{4+3\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

(Ⅷ)　エ)　$\longrightarrow$　キ)　も同様。

■

4.2.2

表 8: 表

V	K	M $(M=2K)$	U $(U=2V)$	Z $(Z=U-2)$ $=N_2N_3$	N_2	N_3	α_1 $\left(\alpha_1=\dfrac{Z+M\sqrt{2}}{2N_3}\right)$
3	2	4	6	4	1	4	$\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$
3	2	4	6	4	4	1	$2+2\sqrt{2}$
17	12	24	34	32	1	32	$\dfrac{4+3\sqrt{2}}{8}$
17	12	24	34	32	2	16	$\dfrac{4+3\sqrt{2}}{4}$
17	12	24	34	32	4	8	$\dfrac{4+3\sqrt{2}}{2}$
17	12	24	34	32	8	4	$4+3\sqrt{2}$
17	12	24	34	32	16	2	$8+6\sqrt{2}$
17	12	24	34	32	32	1	$16+12\sqrt{2}$